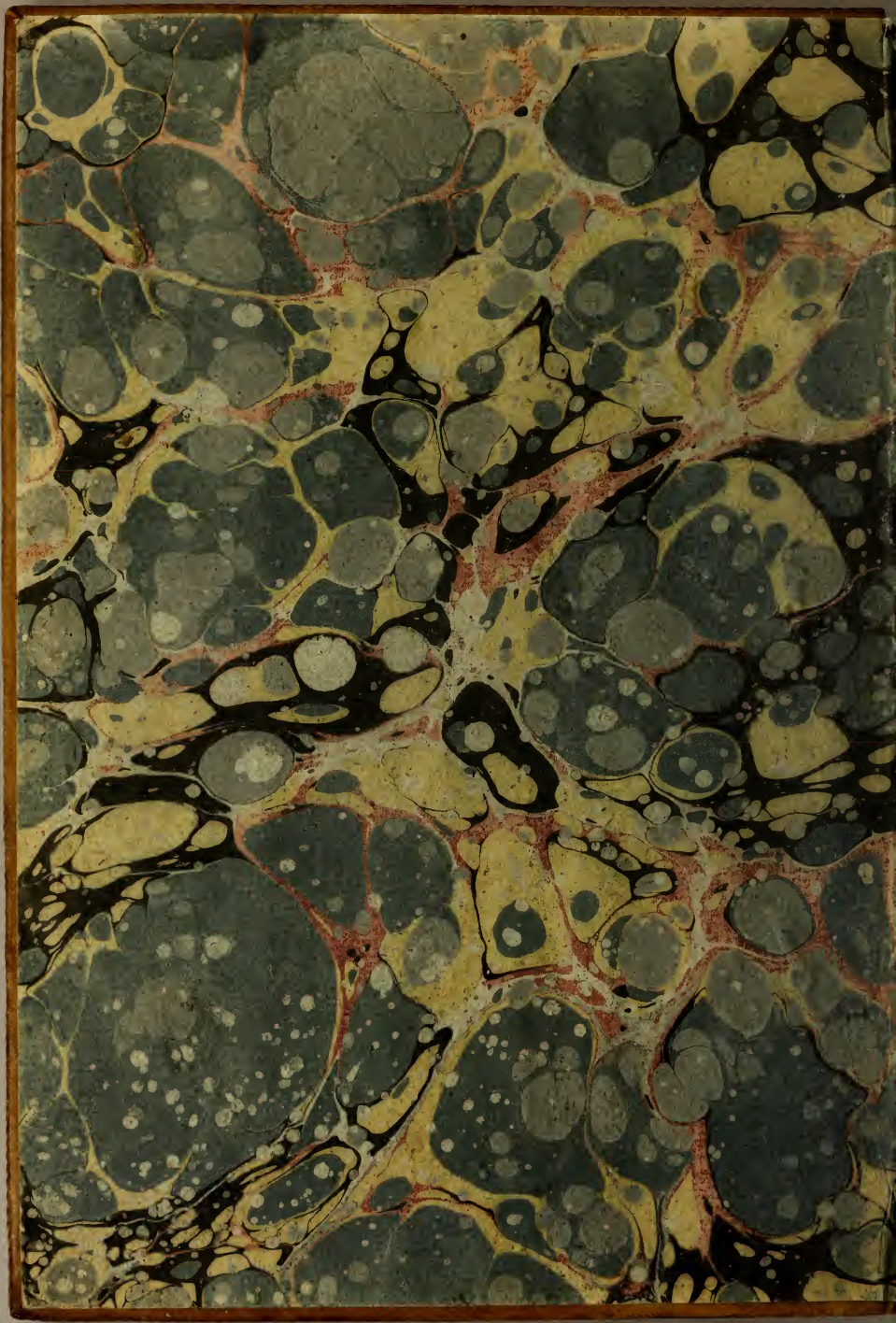
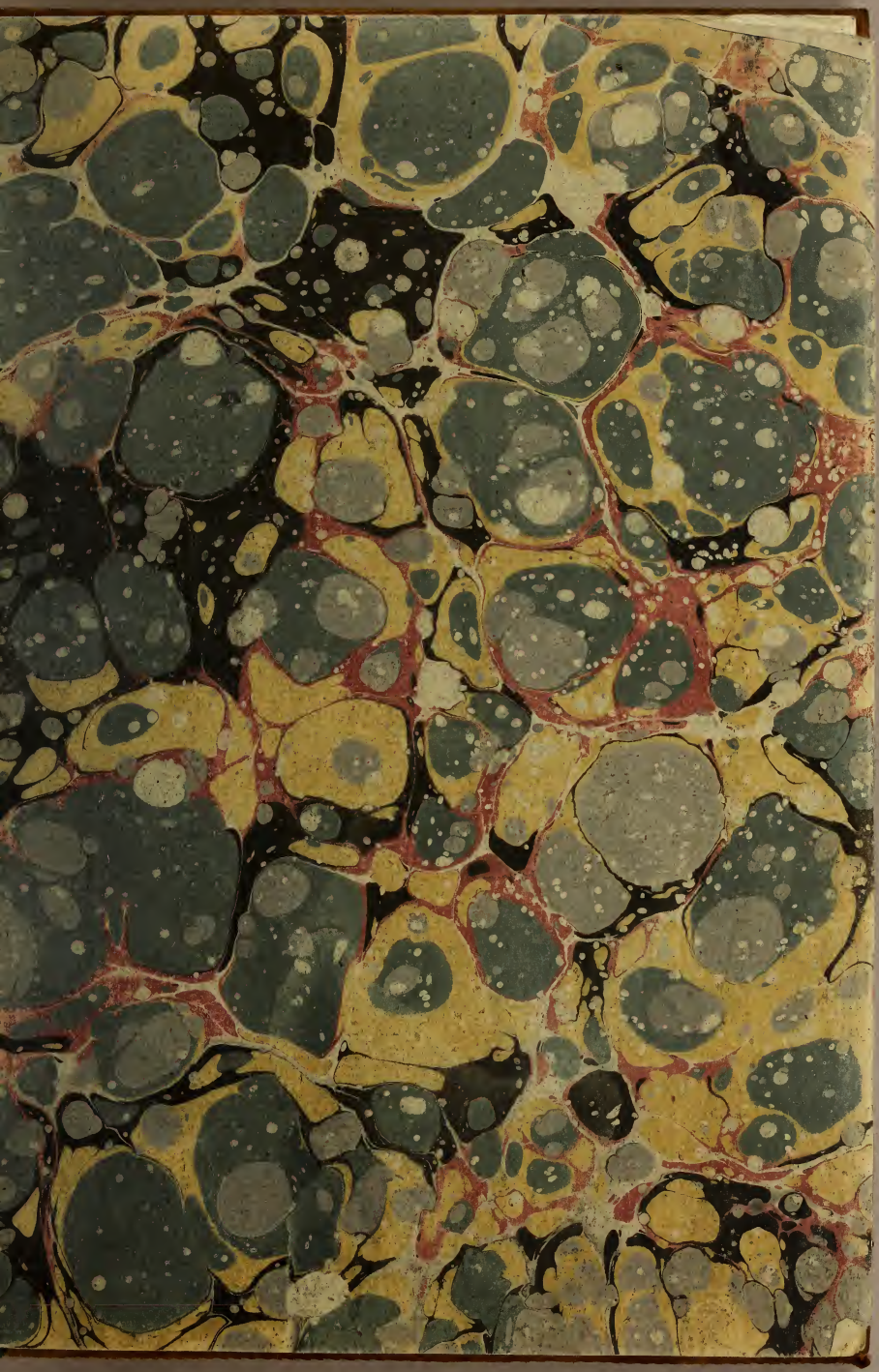




DEMONSTRAÇAÕ E AMPLIAÇAÕ

DO

CALCULO DOS ECLIPSES

PROPOSTO

NO PRIMEIRO VOLUME

DAS EPHEMERIDES DE COIMBRA

COIMBRA:

NA REAL IMPRENSA DA UNIVERSIDADE

1806.

RP.JCB

DEMONSTRAÇAÕ E AMPLIAÇAÕ DO CALCULO DOS ECLIPSES.

§. I.

Construcçaõ Preliminar.

1. Como neste methodo de calcular os Eclipses usamos da parallaxe horizontal correspondente ao semidiametro da Terra no Lugar, para o qual se fizer o calculo, e da Latitude ou altura do pólo delle, reduzida ao que pareceria sendo vista do centro, isto he, diminuida do angulo formado pela vertical com o dito semidiametro: começaremos pelo calculo destas reducções.

2. Seja CE (*Fig.* 1.) o semidiametro do Equador, CO o do Lugar O, OM a normal, que he como raio da esphera osculadora do ellipsoide terrestre no ponto O, e em todos os do parallello que passa por O, e CP o semi-eixo da Terra. He claro que estas quatro linhas, sendo vistas directamente do centro da Lua, o seriaõ por angulos proporcionais a ellas, e que esses angulos saõ as parallaxes respectivas da Lua, a equatoria, a elliptica e espherica do Lugar O, e a polar, as quais denotaremos por π, p, p', π'. He claro tambem, que tirando ON perpendicular a CP, será MON a Latitude de O que chamaremos L, e CON a Latitude reduzida pela diminuiçaõ do angulo da vertical MOC, que chamaremos P; e convem determinar P por L, e p, p' por π.

3. Suppondo pois $CE = \pi$, $CP = \pi'$, e $CP : CE :: 1 : \rho$, pelas propriedades sabidas da ellipse teremos

$$y^2 = \pi^2 - \rho^2 x^2, \text{ e } MN = \rho^2 x,$$

sendo $CN = x$, $NO = y$. E porque os triangulos MON, CON daõ $\text{tg. } L : \text{tg. } P :: MN : CN :: \rho^2 : 1$, será

$$\text{tg. } P = \frac{\text{tg. } L}{\rho^2} = \text{tg. } L - \frac{(\rho^2 - 1)}{\rho^2} \text{tg. } L.$$

Mas considerando este ultimo e pequeno termo como differença de tg. L,

e advertindo que a differença do arco he igual á da tangente multiplicada pelo quadrado do coseno, teremos

$$P = L - \frac{(\rho^2 - 1)}{\rho^2} \text{ sen. } L \cos. L \text{ em partes do raio, ou}$$

$$\text{sen. } (L - P) = \frac{(\rho^2 - 1)}{\rho^2} \text{ sen. } L \cos. L = \frac{(\rho + 1)(\rho - 1)}{\rho^2} \text{ sen. } L \cos. L.$$

E porque ρ differe muito pouco de 1, em vez de $\frac{\rho + 1}{\rho^2}$ pode substituir-se 2, e será

$$\text{sen. } (L - P) = 2 (\rho - 1) \text{ sen. } L \cos. L.$$

4. Como he $ON = y = p' \cos. L$, e $MN = p' \text{ sen. } L = \rho^2 x$, que dá $x = \frac{p' \text{ sen. } L}{\rho^2}$, substituindo estes valores na equaçaõ $y^2 = \pi^2 - \rho^2 x^2$, teremos

$$p'^2 \cos.^2 L = \pi^2 - \frac{p'^2 \text{ sen.}^2 L}{\rho^2},$$

donde se tira

$$p'^2 \left(1 - \frac{(\rho^2 - 1)}{\rho^2} . \text{ sen.}^2 L\right), \text{ ou } p'^2 (1 - 2 (\rho - 1) \text{ sen.}^2 L) = \pi^2,$$

e $$p' = \frac{\pi}{\sqrt{(1 - 2 (\rho - 1) \text{ sen.}^2 L)}} = \pi + \pi (\rho - 1) \text{ sen.}^2 L.$$

E porque o triangulo MOC dá $p' : p :: \cos. P : \cos. L ::$ $\cos. (L - 2 (\rho - 1) \text{sen. } L \cos. L) : \cos. L :: 1 + 2 (\rho - 1) \text{ sen.}^2 L : 1$, teremos

$$p = \frac{\pi + \pi (\rho - 1) \text{ sen.}^2 L}{1 + 2 (\rho - 1) \text{ sen.}^2 L} = \pi - \pi (\rho - 1) \text{ sen.}^2 L.$$

Donde se vê, que a parallaxe equatoria he media arithmetica entre a elliptica e espherica de qualquer Lugar, as quais se acharáõ ambas por meio da mesma reducçaõ $\pi (\rho - 1) \text{ sen.}^2 L$ subtractiva da equatoria para ter a primeira, e additiva para ter a segunda.

5. Usando pois da parallaxe elliptica p, e da altura do pólo reduzida P, teremos o raio do parallello terrestre $ON = p \cos. P$, e a distancia delle ao centro $CN = p \text{ sen. } P$. E suppondo Cs dirigida a hum astro infinitamente distante, cuja declinaçaõ $ECs = D$, e tirando CB perpendicular a Cs, NT e OS perpendiculares, e Nn parallella a CB: está claro, que do astro se veria o arco do meridiano terrestre projectado orthographicamente sobre a linha CB, e particularmente o centro do parallello N em T, e o Observador O em S. E porque $PCB = NOn = D$, será

$$CT = p \text{ sen. } P \cos. D, \quad TS = Nn = p \cos. P \text{ sen. } D,$$

e por conseguinte

$$CS = p \text{ sen. } P \text{ cos. } D - p \text{ sen. } D \text{ cos. } P = p \text{ sen. } (P - D).$$

6. Imaginando agora dous planos, que passem por CB e CP, e perpendiculares ao plano da figura, cuja intersecçaõ será huma linha perpendicular em C ao mesmo plano, e cuja inclinaçaõ será a mesma das linhas CB, CP, e igual á declinaçaõ do astro D: he tambem claro, que todos os pontos do diametro do parallello perpendicular em N ao plano da figura, que he o do meridiano, seraõ projectados sobre huma mesma linha recta perpendicular ao mesmo plano em T, e parallella á intersecçaõ dos outros dous, donde se segue que a distancia de todos á dita intersecçaõ será igual a $CT = p$ sen. P cos. D.

7. He tambem facil de ver que a projecçaõ dos pontos correspondentes da circumferencia do parallello será determinada por linhas como Nn, e parallellas a Nn, as quais variaõ em rasaõ da variaçaõ da ordenada do parallello, sendo sempre o angulo $NOn = D$. E porque sendo o angulo horario de qualquer dos ditos pontos $= H$, he a ordenada $= NO$ cos. $H = p$ cos. P cos. H, e a distancia della ao plano do meridiano $= NO$ sen. $H = p$ cos. P sen. H, teremos a linha correspondente a $Nn = p$ sen. D cos. P cos. H, e por conseguinte a distancia do ponto da projecçaõ á intersecçaõ sobredita $= p$ sen. P cos. $D - p$ sen. D cos. P cos. H. Logo, suppondo que ACB he o plano da projecçaõ perpendicular ao da figura, e que nelle he CA a projecçaõ do meridiano, passando O a representar qualquer ponto do parallello, cujo angulo horario $= H$, será a projecçaõ delle em S determinada pelas coordenadas $CR = p$ sen. P cos. $D - p$ sen. D cos. P cos. H, e $RS = p$ cos. P sen. H.

8. O plano da projecçaõ separa o hemispherio da Terra, que he visivel do centro do astro, ao qual attribue o Observador o seu proprio movimento diurno: de sorte, que chegando elle ao meridiano fixo CA verá o astro no meridiano; e chegando ao plano da projecçaõ, o verá no horizonte, e isso se determinará pela condiçaõ de $SO = o$. Mas he

$$SO = Sn + nO = p \text{ sen. } P \text{ sen. } D + p \text{ cos. } P \text{ cos. } D \text{ cos. } H:$$

Logo estará o astro no horizonte, quando for

$$\text{cos. } H = -\text{ tg. } P \text{ tg. } D;$$

e o angulo H será agudo ou obtuso conforme P e D forem de differente ou da mesma denominaçaõ, positivo para o occaso, e negativo para o naşcimento do astro: Advertindo-se, que este horizonte naõ he o apparente perpendicular a MO, mas o parallactico perpendicular a CO.

9. Como havemos de servirnos da altura $S\,O$ do Observador sobre o plano da projecçaõ, usaremos de outra expressaõ della mais commoda para o calculo por meio das coordenadas $C\,R$, $R\,S$; e muito mais porque o angulo RCS, de que ella depende, ha tambem de servir para outro uso. Sendo pois $RCS = \mu$, $COS = \pi$, e suppondo p cos. P sen. $H = n$, p sen. P cos. $D - p$ sen. D cos. P cos. $H = m$, teremos

$$\text{tg. } \mu = \frac{n}{m}, \quad \text{sen. } \pi = \frac{n}{p \text{ sen. } \mu} = \frac{m}{p \text{ cos. } \mu}, \quad \text{e} \quad S\,O = p \text{ cos. } \pi;$$

expressaõ, que denota em minutos o angulo, porque $S\,O$ seria vista directamente do centro da Lua, mas que se tornará em sen. p cos. π, quando se comparar com a distancia della supposta $= 1$.

10. Se o astro variar de declinaçaõ, e o calculo se fizer para hum tempo t contado do instante, em que a declinaçaõ delle era D, que supporemos ser o da conjunçaõ com a Lua, em ascensaõ recta, entaõ a variaçaõ de D naõ affectará nada a ordenada $R\,S$, mas taõ somente $C\,R$, cuja variaçaõ será $= -dD\,p$ (sen. D sen. $P +$ cos. P cos. D cos. H) $= dD\,p$ cos. π. E porque, sendo o movimento horario do astro em declinaçaõ $= d'$, he $dD = t$ sen. d', teremos a variaçaõ de $C\,R = t\,p$ sen. d' cos. $\pi = d't$ sen. p cos. π, porque sendo d' e p arcos pequenos he p sen. $d' = d'$ sen. p. Por tanto, suppondo sempre p sen. P cos. $D - p$ sen. D cos. P cos. $H = m$, será para qualquer tempo t a coordenada

$$C\,R = m - d'\,t \text{ sen. } p \text{ cos. } \pi.$$

11. Assim como usamos da parallaxe elliptica p com a sua Latitude reduzida P, podiamos tambem usar da espherica p' com a Latitude L, ou da equatoria, ou da polar com a Latitude reduzida competentemente. E qualquer destes tres modos parecerá á primeira vista que mereceria ter preferencia por escuzarem huma reducçaõ, ou a da Latitude, ou a da parallaxe. Mas vejamos primeiro, como cada hum delles se podia substituir ao que acabamos de expôr. Tudo está em exprimir $C\,N$ e $N\,O$ pelas ditas parallaxes; porque o resto da projecçaõ he da mesma maneira.

12. Sendo pois (*Fig.* 1.) $O\,M = p'$, e $M\,O\,N = L$, teremos

$$O\,N = p' \text{ cos. } L, \text{ e } M\,N = p' \text{ sen. } L.$$

Mas he $M\,N : C\,N :: \rho^2 x : x :: \rho^2 : 1$. Logo $C\,N = \dfrac{p' \text{ sen. } L}{\rho^2}$;

e conseguintemente

$$C\,R = \frac{p' \text{ sen. } L \text{ cos. } D}{\rho^2} - p' \text{ sen. } D \text{ cos. } L \text{ cos. } H, \quad R\,S = p' \text{ cos. } L \text{ sen. } H,$$

$$\text{e} \quad SO = \frac{p' \text{ sen. } L \text{ sen. } D}{\rho^2} + p' \text{ cos. } L \text{ cos. } H,$$

donde resulta por condiçaõ do astro no horizonte

$$\text{cos. } H = -\frac{\text{tg. } L \text{ tg. } D}{\rho^2},$$

expressaõ que coincide com a do n.º 8. por ser $\text{tg. } P = \frac{\text{tg. } L}{\rho^2}$.

13. Sendo tambem ON cortada pelo circulo inscrito em e, tirando eC, e OQ parallella a eC, como pela propriedade da ellipse he $Ne : NO :: 1 : \rho$, e os triangulos similhantes NeC, NOQ daõ $Ne : NO :: Ce : OQ$, e he $Ce = CP$, será $OQ = CE = \pi$. E fazendo $NOQ = l$, teremos $\text{tg. } l : \text{tg. } L :: NQ : NM :: \rho . CN : \rho^2 . CN :: 1 : \rho$, e conseguintemente

$$\text{tg. } l = \frac{\text{tg. } L}{\rho} = \text{tg. } L - \frac{(\rho - 1) \text{ tg. } L}{\rho};$$

donde, por hum modo similhante ao que acima practicámos (n. 3.) se deduz

$$\text{sen. } (L - l) = (\rho - 1) \text{ sen. } L \text{ cos. } L;$$

e a reducçaõ de L a l se fará tirando-lhe a ametade do angulo da vertical.

Assim teremos $NO = \pi \text{ cos. } l$, $NQ = \pi \text{ sen. } l$, e $CN = \frac{\pi \text{ sen. } l}{\rho}$;

$$CR = \frac{\pi \text{ sen. } l \text{ cos. } D}{\rho} - \pi \text{ sen. } D \text{ cos. } l \text{ cos. } H, \quad RS = \pi \text{ cos. } l \text{ sen. } H,$$

$$\text{e} \quad SO = \frac{\pi \text{ sen. } l \text{ sen. } D}{\rho} + \pi \text{ cos. } l \text{ cos. } D \text{ cos. } H.$$

14. Em fim se quizessemos usar da parallaxe polar $Ce = \pi'$, e da Latitude reduzida $CeN = QON = l$, teriamos $CN = \pi' \text{ sen. } l$, $Ne = \pi' \text{ cos. } l$, e $NO = \rho \pi' \text{ cos. } l$. Donde se conclue

$$CR = \pi' \text{ sen. } l \text{ cos. } D - \pi' \rho \text{ sen. } D \text{ cos. } l \text{ cos. } H,$$

$$RS = \pi' \rho \text{ cos. } l \text{ sen. } H,$$

$$\text{e} \quad SO = \pi' \text{ sen. } l \text{ sen. } D + \pi' \rho \text{ cos. } l \text{ cos. } D \text{ cos. } H.$$

Tal hé a base do methodo de M. du Séjour (*Traité Analytique des Mouvemens apparens des Corps Célestes* .... A Paris MDCCLXXXVI.). E

daqui se entenderá, que a complicaçaõ das Formulas deste Illustre Autor, e que os longos calculos que ellas requerem, e que por mais facilitados que se apresentem por typos engenhosamente dispostos, sempre seraõ capazes de desalentar o animo dos mais infatigaveis Calculadores, naõ vem do fundamento da projecçaõ, mas de se haver ainda caminhado pelo trilho antigo, combinando immediatamente dous movimentos disparadamente reportados, o da Lua á Ecliptica, e o do Observador ou do astro ao Equador.

15. Mas a pequena ventagem de huma reducçaõ previa de menos em qualquer destes tres methodos ficaria assás contrapezada pela introducçaõ do numero ρ, o qual viria a difficultar e complicar a soluçaõ de alguns Problemas. E alem disso he de notar, que nelles sempre o raio da projecçaõ he $CO = p$, que naõ poderá ser substituido pela parallaxe respectiva do methodo que se adoptasse, quando convier usar do dito raio na soluçaõ de algum Problema. Donde se vê, que o Methodo que adoptamos he o mais natural, e ao mesmo tempo o mais simples e mais expedito. E pelo que respeita ás reducçoens, poderia evitar-se o calculo (aliás breve e facil) das formulas acima dadas, por meio da Tabella que para isso demos no primeiro Volume; mas para mais facilitar esse artigo daremos outra mais extensa no fim deste escrito.

§. II.

Problema Fundamental.

16. *Dado o tempo da conjunçaõ em Ascensaõ Recta da Lua com qualquer astro pouco differente em Declinaçaõ, achar a distancia apparente dos centros para qualquer tempo dado, e pouco distante da mesma conjunçaõ.*

Seja - - - - - - - - - - - - -
o tempo da ☌ - - - - - - - - - $= T$
o tempo proposto - - - - - - - - - $= T'$
e $T' - T$ - - - - - - - - - $= t$
sendo t reduzido á unidade da hora;
o tempo da passagem do astro pelo meridiano - - - $= \Theta$
e $T' - \Theta$ (convertido em gráos) - - - - - $= H$
a altura do pólo reduzida - - - - - - $= P$
a parallaxe horiz. da ☾ — a do astro - - - - $= p$
e a variaçaõ horaria della - - - - - - $= p'$

a declinaçaõ da ☾ na ☌ - - - - - - - $= D'$
a do astro - - - - - - - - - - - $= D$
e $D' - D$ - - - - - - - - - - - $= \Delta$
o movimento horario da ☾ em declinaçaõ — o do astro na ☌ $= \delta$
o do astro - - - - - - - - - - - $= d'$
e o numero B da Ephemeride correspondente á declinaçaõ da Lua $= \eta'$
(movim. hor. ☾ em A. R. na ☌ — o do astro) × cos. D' - $= h$
e $B \cos. D' - \frac{1}{2} \delta \text{ sen. } h \text{ tg. } D'$ - - - - - - $= \eta$
sendo B o numero da Ephemeride correspondente ao movimento
da Luã em Ascensaõ Recta;
e a distancia apparente dos centros procurada - - - $= S$.

17. Faça-se $p \cos. P \text{sen. } H = n$, $p \text{ sen. } P \cos. D - p \text{ sen. } D \cos. P \cos. H = m$,

$$\text{tg. } \mu = \frac{n}{m}, \quad \text{sen. } \pi = \frac{n}{p \text{ sen. } \mu} = \frac{m}{p \cos. \mu}, \quad h t + \eta t^2 - n - \frac{n p' t}{2 p} = N,$$

$$\Delta - m - \frac{m p' t}{2 p} + \delta t + \eta' t^2 + d' t \text{ sen. } p \cos. \pi = M, \quad \text{tg. } \phi = \frac{N}{M},$$

$$\Sigma = \frac{N}{\text{sen. } \phi} = \frac{M}{\cos. \phi}; \text{ e teremos}$$

$$S = \Sigma + \Sigma \text{ sen. } p \cos. \pi.$$

18. DEMONSTRAÇAÕ: Suppondo transportado da Fig. 1. para a Fig. 2. o plano da projecçaõ $A C B$ com a do Observador O em S determinada pelas coordenadas $C R$, $R S$, imaginemos tirado pelo centro da Lua L outro plano parallello a elle, e conseguintemente perpendicular tambem a $C s$ em C'. He evidente, que o Observador em O verá o astro supposto a huma distancia infinita por huma linha $O S'$ parallella a $C s$, e por tanto o verá corresponder ao ponto S' do dito plano, determinado pelas coordenadas $C' R'$ parallella e igual a $C R$, e $R' S'$ parallella e igual a $R S$.

19. Se o astro porem tiver parallaxe sensivel será visto por huma linha $O \sigma'$ inclinada para $C s$, sendo $S' o \sigma'$ a sua parallaxe de altura. E porque, $C S$ ou $C' S'$ he o seno da distancia do astro ao Zenith para o raio $C O$, tirando $\sigma' \sigma$ parallella a $S' S$, e suppondo a parallaxe horizontal do astro $= \pi$, teremos

$$S' \sigma' = S \sigma = \frac{\pi . C S}{C O} = \frac{O O' . C S}{C O},$$

e conseguintemente $O\,O' = \pi$. Logo tomando $C\,O'$ igual á differença das parallaxes horizontais da Lua e do astro pelas mesmas formulas se calcularáõ as ordenadas $C\rho$, $\rho\,\sigma$, que determinaõ o lugar onde o astro ha de ser visto em σ'. Se o astro estivesse mesmo em C', seria $C\,O' = o$, e a distancia verdadeira dos astros naõ seria alterada pelas parallaxes, salvo taõ sómente o augmento optico que lhe provem de ser vista da altura $S\,O$ sobre o plano da projecçaõ, ou do horizonte; e isto he o que succede continuamente ao semidiametro da Lua supposto $= L\,C'$.

20. Como convem suppôr fixo o meridiano $C'\,A'$, que sempre passe pelo centro do astro, e sempre C' marque a declinaçaõ delle no instante da conjunçaõ, no caso de elle naõ ser fixo, como saõ as estrellas, deve o seu movimento transportar-se á Lua em sentido contrario, usando da differença dos movimentos horarios, donde resulta a orbita relativa da Lua $K\,L$, sendo K o ponto da sua orbita real em que ella se achou, ou ha de achar no instante da conjunçaõ. He necessario, que determinemos o ponto relativo L, em que se ha de achar em qualquer tempo t contado do instante da conjunçaõ.

21. Para isso seja a declinaçaõ da Lua no ponto $K = D'$, o seu movimento relativo em declinaçaõ no tempo $t = D''$, e em ascensaõ recta $= A$, sendo A, D'' arcos pequenos. Teremos (Trig. Spher.)

$$\cos. K\,L = \text{sen. } D' \text{ sen. } (D' + D'') + \cos. A \cos. D' \cos. (D' + D''),$$

donde se segue

$$1 - 2\,\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} K\,L = \text{sen. } D' \text{ sen. } (D' + D'') + \cos. D' \cos. (D' + D'') - 2\,\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} A \cos. D' \cos. (D' + D'')$$

$$= 1 - 2\,\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} D'' - 2\,\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} A \cos. D' \cos. (D' + D'').$$

E porque os senos de arcos pequenos saõ proporcionais aos mesmos arcos, e

$$\cos. D' \cos. (D' + D'') = \cos.^2 D' - D''.\ \text{sen. } D' \cos. D' = \cos.^2 (D' + \tfrac{1}{2} D''),$$

teremos

$$K\,L^2 = D''^2 + A^2 \cos.^2 (D' + \tfrac{1}{2} D''),$$

e conseguintemente será $K\,L$ a hypothenusa de hum triangulo rectangulo, cujos lados seraõ $K\,n = D''$, e

$$L\,n = A \cos. (D' + \tfrac{1}{2} D'') = A \cos. D' - \tfrac{1}{2} D'' \text{ sen. } A \cos. D' \text{ tg. } D'.$$

Mas

$$D'' = t\ (\text{movim. hor. } \mathbb{C} \text{ em decl.} - o \text{ do astro} + n'\,t) = \delta\,t + n'\,t^2,$$

e

$$A = t(\text{mov. hor. } \mathbb{C} \text{ em A. R. } - \text{ o do astro } + B\,t),$$

donde

$$A \cos. D' = h\,t + B\,t^2 \cos. D',$$

e

$$-\text{sen. } A \cos. D' \,.\, \tfrac{1}{2} D'' \text{ tg. } D' = -\tfrac{1}{2}\delta\, t^2 \text{ sen. } h \text{ tg. } D'.$$

Logo fazendo, como temos feito,

$$(\text{mov. hor. } \mathbb{C} \text{ em A. R. } - \text{ o do astro}) \cos. D' = h,$$

e

$$B \cos. D' - \tfrac{1}{2}\delta \text{ sen. } h \text{ tg. } D' = \eta,$$

teremos

$$K\,n = \delta\, t + \eta'\, t^2,$$

e

$$L\,n = h\,t + \eta\, t^2.$$

22. Agora tirando $S'm$ perpendicular a $L\,n$, e suppondo $L\,m = N$, $S'm = M$, $m\,S'L = \phi$, $S'L = \Sigma$, teremos

$$N = L\,n - m\,n = L\,n - R'S' = h\,t + \eta\, t^2 - n - \frac{n\,p'\,t}{2\,p},$$

$$M = R'n = C'n - C'R'$$

$$= \Delta - m - \frac{m\,p'\,t}{2\,p} + \delta\, t + \eta'\, t^2 + d'\, t \text{ sen. } p \cos. \pi \text{ (n. 10.)},$$

sendo $\frac{n\,p'\,t}{2\,p}$, $\frac{m\,p'\,t}{2\,p}$ as correcções de n, m, que resultaõ da variaçaõ da parallaxe no tempo t, tg. $\phi = \frac{N}{M}$, e

$$\Sigma = \frac{N}{\text{sen. } \phi} = \frac{M}{\cos. \phi}.$$

Será logo Σ a distancia apparente dos centros reduzida aõ plano da projecçaõ, e qual seria vista do ponto S projecçaõ do Observador pelo angulo $L\,S\,S'$, de que ella he juntamente a medida, porque pela escala adoptada no calculo he proporcional ao arco que subtenderia o raio da projecçaõ CO visto directamente de huma distancia igual á da Lua, qual tambem he sem erro sensivel $S\,S'$. Mas o Observador em O a verá pelo angulo $LOS' = S$, que denota a distancia apparente dos centros. E porque os angulos opticos, porque se vê huma mesma linha Σ directamente de differentes distancias, saõ na rasaõ inversa das distancias, e $L\,S\,S' = \Sigma$, teremos $S : \Sigma ::$ $S\,S' : O\,S' :: 1 : 1 - \text{sen. } p \cos. \pi$ (n. 9.), e em fim

$$S = \frac{\Sigma}{1 - \text{sen. } p \cos. \pi} = \Sigma + \Sigma \text{ sen. } p \cos. \pi :$$

Advertindo-se, que aqui deverá ser p a parallaxe da Lua sem a diminuiçaõ da do outro astro, ainda que usando-se da differença dellas, visto serem as dos outros muito menores que a da Lua, naõ resultará dahi erro attendivel.

23. *N. B.* No calculo directo dos eclipses para o annuncio delles, podem desprezar-se os pequenos termos ηt^2, $\eta' t^2$, $\frac{np't}{2p}$, $\frac{mp't}{2p}$, $d't$ sen. p cos. π; advertindo-se, que este ultimo he por si nullo nos eclipses das estrellas, pois que nellas he sempre $d' = 0$. Mas no calculo inverso, quando das observaçoẽs voltarmos a rectificar qualquer dos elementos dados pelas Taboas da Lua, e concluir a differença da longitude dos Lugares onde se fizeraõ as mesmas observaçoẽs, naõ deve desprezar-se nada do que pode influir, ainda que pouco seja, na exactidaõ dos resultados.

24. Nas formulas antecedentes, e em todas as seguintes, suppoem-se os angulos positivos, e naõ maiores que 90°. Sendo de outra sorte, deverá attender-se á regra dos sinais: Que o seno segue sempre o sinal do angulo; e que o coseno, sem attençaõ alguma ao sinal do angulo, he positivo ou negativo, segundo elle for menor ou maior que 90°. E para isso se contaráõ os angulos sómente até 180° tanto pela parte positiva, como pela negativa, sendo manifesto que os angulos maiores que 180° se reduzem ao seu supplemento para 360° com o sinal contrario, como por exemplo, + 285° marca na circumferencia do circulo o mesmo ponto que — 75°, e — 285° o mesmo que + 75°.

25. Alem disso cumpre notar, que a altura do pólo P, e as declinaçoẽs D, D', se haõ de entender positivas ou negativas, conforme forem de denominaçaõ boreal, ou austral; e que os movimentos horarios em declinaçaõ seraõ tambem positivos, ou negativos, segundo forem para o norte, ou para o sul. Os angulos u, e φ levaõ o sinal do numerador da expressaõ da sua respectiva tangente, sendo agudos ou obtusos, conforme for positivo ou negativo o denominador da mesma expressaõ, e π he sempre positivo, e naõ maior que 90°. O tempo t he negativo antes da Conjunçaõ, positivo depois; e o angulo H negativo antes da passagem do astro pelo meridiano, positivo depois, e inutil quando maior que o angulo semidiurno, determi-

nado pela equaçaõ cos. $H = -$ tg. P tg. D (n. 8.), porque entaõ se acharia o astro debaixo do horizonte.

26. Como o angulo H he dado em tempo, e ha de reduzir-se a gráos, e algumas vezes a arco rectificado, ou em partes do raio tomado como unidade, supponhamos a revoluçaõ diurna do astro em tempo medio, e reduzida á unidade da hora $= r$, e fazendo $\frac{360^\circ}{r} = \gamma$, $\frac{6,2831853}{r} = \gamma'$, teremos para qualquer tempo t o angulo horario γt reduzido á unidade do gráo, e $\gamma' t$ reduzido á do raio. O logarithmo de 360° he 2.5563025, e o de 6,2831853 he 0.7981799; e porque para as estrellas he $r = 23^h,93447$, teremos sempre para ellas log. $\gamma = 1.1772786$, e log. $\gamma' = 9.4191560$. A revoluçaõ dos outros astros, incluindo a do Sol, se achará pela Ephemeride comparando a passagem antecedente delles pelo meridiano com a seguinte, e se achará em tempo medio, porque a elle correspondem os calculos da mesma Ephemeride. Se quizermos usar do tempo verdadeiro, sendo sempre a revoluçaõ do Sol em tempo medio $= \rho$, e a de qualquer outro astro $= r$, deveremos fazer $\frac{\rho.360^\circ}{24.r} = \gamma$, e $\frac{\rho.6,2831853}{24.r} = \gamma'$, para γ, e γ' corresponderem a 1^h do tempo verdadeiro. Entaõ, se o astro for o mesmo Sol, será $r = \rho$, $\gamma = 15^\circ$, e log. $\gamma' = 9.4179687$; mas para as estrellas já naõ seriaõ constantes γ, e γ', nem tais como acima ficaõ calculados, senaõ nos dias em que o dia verdadeiro he igual ao medio: Advertindo-se tambem, que deveriaõ em tal caso reduzir-se os movimentos horarios da Lua, porque a Ephemeride naõ os dá correspondentes á hora do tempo verdadeiro, mas á hora sempre igual do tempo medio.

27. EXEMPLO: Para compararmos o resultado desta Soluçaõ com o de M. du Séjour, usaremos do mesmo exemplo delle no eclipse do Sol do primeiro de Abril de 1764, procurando a distancia apparente dos centros ás 9^h 4' 33" do tempo verdadeiro em Londres por 51° 31' de Latitude boreal. E suppondo com elle a ellipticidade da Terra $\frac{1}{177}$, e a parallaxe polar da Lua 54' 1",5, teremos a equatoria 54' 19",8, e a de Londres 54' 8",6 (n. 4.): donde, suppondo tambem a do Sol $= 10''$, será $p = 53'\ 58'',6 = 53',9767$, e a Latitude reduzida $P = 51^\circ\ 12'$. Suppondo mais com elle a uniformidade do movimento da Lua, e desprezando a variaçaõ da parallaxe, e da

declinaçaõ do Sol, faremos nas nossas formulas $d' = 0$, $p' = 0$, $\eta' = 0$. E pelo que respeita a $\eta = B \cos. D' - \frac{1}{2}\delta$ sen. h tg. D', faremos $B \cos. D' = 0$, e conservaremos o outro termo, posto que muito pequeno. Porque sem embargo de ter o Autor desprezado nas suas hum termo analogo, multiplicando a differença dos movimentos horarios em longitude pelo coseno da latitude da ☾ na ☌, quando devia ser pelo coseno da latitude correspondente ao meio do intervallo entre a ☌ e o tempo proposto; com tudo esse termo no caso presente he muito mais pequeno ($\frac{1}{36}$ daquelle).

28. Com os mesmos elementos do Autor (pag. 5.) achámos pois a ☌ em A. R. ás $11^h\,0'\,9'',3$, sendo entaõ $D' = 5°\,34'\,22'',6$, $D = 4°\,49'\,31'',2$, $\Delta = 44'\,51'',4 = 44',857$, o movimento horario da ☾ em A. R. $= 26'\,20'',4$, o do $\odot = 2'\,16'',4$, o da ☾ em decl. $= 14'\,6'',1$, o do $\odot = 57'',7$: donde concluimos $\delta = 13',140$, $h = 23',953$, $\eta = -0',0045$. E como para o tempo proposto temos $H = -43°\,51'\,45''$, e $t = -1^h,92675$, será $n = -23',436$, $m = 39',866$, $\mu = -30°\,27'$, $\pi = 58°\,58'$, $ht = -46',151$, $\eta t^2 = -0',017$, $\delta t = -25',318$, $N = -22',732$, $M = -20',327$, $\phi = -131°\,48'\,10''$, $\Sigma = 30',494$, Σ sen. p cos. $\pi = 0',248$, e $S = 30',742 = 30'\,44'',52$. M. du Séjour (pag. 29.) dá em numero redondo $45''$; mas do seu mesmo calculo resulta $44'',53$. Esta coincidencia porem he casual, porque aliás deveria haver alguma pequena differença em rasaõ de que elle usou da declinaçaõ do Sol correspondente á ☌ em longit. e nós da correspondente á ☌ em A. R.

29. He de advertir: Que bem podiamos evitar os pequenos termos ηt^2, $\eta' t^2$ etc. nas expressões de M, e N, conservando sempre o effeito delles. E para isso naõ havia mais do que usar da declinaçaõ do astro correspondente, naõ ao instante da conjunçaõ, mas ao do tempo dado T', no calculo de m; e tanto no de m como no de n, usar da parallaxe correspondente ao meio do intervallo entre a conjunçaõ e o tempo T'. Do mesmo modo deveria usar-se dos movimentos horarios calculados naõ para o instante da conjunçaõ, mas para o do meio entre ella e o tempo proposto, e a differença delles em A. R. multiplicar-se pelo coseno da decl. da ☾ correspondente ao mesmo meio. E assim teriamos $N = ht - n$, $M = \Delta + \delta t - m$. Mas isto, que parecerá ventajoso, quando se houver de fazer o calculo para hum só tempo, deixaria de o ser quando se houvessem de fazer para muitos, porque para cada hum seriaõ diversos os valores de h, e δ, e deveriaõ ser calculados de novo.

Rectificando o calculo pela Tab. do ☉ de Lambre na Astr. de Lalande, e pela da ☾ de Clairaut, ☌ em long. em Par. 10h. 32'. 6 t. m. 1'. 1" mais do q' dejour. e ☌ em A. R. 11h. 10'. 59" t. m. ibid. Emtaõ

D' = 5°. 34'. 35 m. hor. ☾ A R 26',344 Del = 14',044
D = 4. 49. 30 B = 0',0072 B = -0',0114
Δ 44. 5

30. Advirta-se tambem: Que havendo de fazer muitos calculos, convem calcular por huma vez sómente o que he constante, como he o primeiro termo, e factor do segundo em $m = p \text{ sen. } P \cos. D - p \text{ sen. } D \cos. P \cos. H$, onde fazendo $p \text{ sen. } P \cos. D = 6$, e $p \text{ sen. } D \cos. P = q$, teremos $m = 6 - q \cos. H$; e assim tendo feito $p \cos. P = g$, será $n = g \text{ sen. } H$. No exemplo, de que aqui usamos, he $6 = 41',917$, log. $g = 1.529199$, log. $q = 0.454090$, log. $h = 1.379358$, log. $\delta = 1.118595$.

§. III.

Calculo directo dos Eclipses em Lugares determinados.

31. *Dado o tempo da ☌ verdadeira em A. R. da ☾ com qualquer astro, achar o da apparente, e a differença apparente das declinações.*

Suppostas as definições de P, p, T, Θ, D, D', Δ, h, δ (n. 16.), a de γ (n. 26.), e as de 6, g, q (n. 30.), seja o tempo procurado da conjunçaõ apparente $= T + \tau$, e a differença apparente das declinações $= \Delta'$. Entaõ, fazendo $\gamma(T - \Theta) = H$, teremos primeiramente

$$\tau = \frac{g}{h} \text{ sen. } (H + \gamma\tau);$$

e calculando successivamente $\theta = \frac{g}{h} \text{ sen. } H$, $\theta' = \frac{g}{h} \text{ sen. } (H + \gamma\theta)$, $\theta'' = \frac{g}{h} \text{ sen. } (H + \gamma\theta')$, será

$$\tau = \theta'' + \frac{(\theta'' - \theta')^2}{2\theta' - (\theta + \theta'')}.$$

E depois, fazendo $6 - q \cos. (H + \gamma\tau) = m$, será

$$\Delta' = \Delta + \delta\tau - m.$$

32. DEM. Sendo a conjunçaõ verdadeira no tempo T quando a Lua passa por K (*Fig.* 3.), e havendo de ser a apparente no tempo $T + \tau$ quando passar pelo circulo de declinaçaõ RL, em que estiver tambem o astro S, será τ o tempo desde a conjunçaõ verdadeira até esse instante, e por consequencia $Le = h\tau$. Mas sendo o angulo horario actual do astro $= \gamma(T + \tau - \Theta) = H + \gamma\tau$, por termos feito $\gamma(T - \Theta) = H$, teremos tambem $Le = g \text{ sen. } (H + \gamma\tau)$: Logo

m. hor. ☉ AR 2',274 Dec. 0,364 $\delta = 13',120$ $h = 24,000$ $\eta = 0,0027$ $\eta' = -0,0114$ $\log \delta$ 1.117934 $\log h$ 1.380211 $\log \eta$ 7.431364 $\log \eta'$ 8.056905

$$\tau = \frac{g}{h} \text{ sen. } (H + \gamma\tau \ .$$

33. A resoluçaõ desta equaçaõ funda-se na regra de falsa posiçaõ. Tomando por primeira hypothese θ, achado pela de $\tau = 0$, dá o resultado θ' em vez de θ com o erro $\theta' - \theta$; e tomando θ' por segunda, dá θ'' com o erro $\theta'' - \theta'$. Entaõ, fazendo a differença dos erros $2\theta' - (\theta + \theta'')$ para a differença das hypotheses $\theta' - \theta$, como o segundo erro $\theta'' - \theta'$ para a correcçaõ da segunda hypothese, teremos

$$\tau = \theta' + \frac{(\theta' - \theta)(\theta'' - \theta')}{2\theta' - (\theta + \theta'')} ;$$

ou mais simplesmente (pondo $\theta'' - (\theta'' - \theta')$ em vez de θ', e reduzindo),

$$\tau = \theta'' + \frac{(\theta'' - \theta')^2}{2\theta' - (\theta + \theta'')} .$$

34. Quando se quizer maior exactidaõ, buscar-se-ha mais θ''', e fazendo entaõ a primeira hypothese de θ', e a segunda de θ'', acharemos do mesmo modo

$$\tau = \theta''' + \frac{(\theta''' - \theta'')^2}{2\theta'' - (\theta' + \theta''')} .$$

E se nos limitarmos sómente ao calculo de θ e θ', como será bastante no caso dos annuncios ordinarios, entaõ se reduzirá a formula a

$$\tau = \theta' + \frac{(\theta' - \theta)^2}{2\theta - \theta'} .$$

Pode tambem neste calculo attender-se á correcçaõ do movimento horario da Lua (n. 22.), fazendo $Le = h\tau + \eta\tau^2$, donde será

$$\tau = \frac{g \text{ sen. } (H + \gamma\tau)}{h + \eta\tau} ,$$

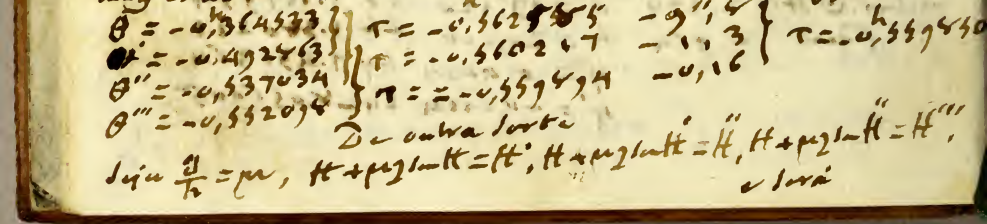
que se resolverá da mesma maneira, fazendo

$$\theta = \frac{g \text{ sen. } H}{h} , \quad \theta' = \frac{g \text{ sen. } (H + \gamma\theta)}{h + \eta\theta} \text{ etc.}$$

A differença apparente das declinações Δ' he representada por $SL = RL - SR = Ce - SR$. Mas $Ce = \Delta + \delta\tau$, e $SR = 6 - q \cos. (H + \gamma\tau) = m$: Logo

$$\Delta' = \Delta + \delta\tau - m.$$

35. EXEMPLO: No mesmo eclipse de 1764, em que temos $P = 51° 12'$,



$p = 53',9767$, $h = 23',953$, $\eta = -0',0045$, $\delta = 13',14$, $\Delta = 44',857$, $T = 11^h\,0'\,9'',3$ (n. 27. 28.), acharemos $H = -14°\,57'\,40''$, donde resulta $\theta = -0^h,36453$, $\theta' = -0^h,49283$, $\theta'' = -0^h,53697$, $\theta''' = -0^h,55202$, e conseguintemente $\tau = -0^h,55981$. Se usassemos somente das tres primeiras quantidades, achariamos $\tau = -0^h,56012$ com a differença de $0^h,00031$, ou de $1'',1$; e se somente das primeiras duas, sahiria $\tau = -0^h,56251$ com o erro de $0^h,0027$, ou de $9'',7$. Sendo pois $\tau = -0^h,55981$, teremos $T + \tau = 10^h\,26'\,34''$, e $H + \gamma\tau = -23°\,21'\,30''$: donde se acha $\delta\tau = -7',356$, $m = 39',305$, e $\Delta' = -1',804$.

36. *Dado o tempo da conjunçaõ apparente, e a differença apparente das declinações, achar a minima distancia dos centros, o tempo della, e a grandeza do eclipse.*

Fazendo para abbreviar, o tempo achado da conjunçaõ apparente $T + \tau = T'$, e o angulo horario $H + \gamma\tau = H'$, suppostas as definições de h, δ, γ', g, q (n. 16. 26. 30.), calcularemos as quantidades

$$h' = h - \gamma' g \cos. H', \quad \delta' = \delta - \gamma' q \text{ sen. } H', \quad \text{tg. } \alpha' = \frac{\delta'}{h'};$$

e teremos

$$\text{Min. dist.} = \Delta' \cos. \alpha',$$

$$\text{e o temp.} = T' - \frac{\Delta' \text{ sen. } \alpha' \cos. \alpha'}{h'}.$$

E sendo necessario para haver eclipse de estrella, que o semidiametro da Lua seja maior que a minima distancia, e que tambem o seja a soma dos semidiametros para o haver do Sol: neste caso, sendo o excesso da soma sobre a minima distancia $= E$, e o semidiametro do Sol $= s$, será o eclipse de $\frac{6E}{s}$ digitos boreais, ou austraes, segundo for Δ' positivo, ou negativo.

37. DEM. Supponhamos, que no instante da conjunçaõ apparente em L (*Fig.* 3.) fica o astro fixo em S, passando o seu movimento para a Lua em sentido contrario, para termos o movimento relativo, e apparente della. Entaõ, como no tempo τ os movimentos da Lua perpendicular, e parallelamente a CK saõ $h\tau + \eta\tau^2$, e $\delta\tau + \eta'\tau^2$, differenciando estas quantidades seraõ $h\,d\tau + 2\eta\,d\tau$, e $\delta\,d\tau + 2\eta'\tau\,d\tau$ as velocidades pelas mesmas direcções no ponto L. E como o astro tem pelas mesmas direcções os movimentos g sen. H', e $6 - q$ cos. H', differenciando tambem estas quantidades, e reflectindo que $d\,H' = \gamma'\,d\tau$, seraõ as suas respectivas ve-

$\tau = \mu \sin H' \cdot \frac{1 - \mu^2 \sin H \cos H'}{1 - \mu^2 \gamma H'} = -0^h,560444 \quad -3'',7$

$= \mu \sin H'' \cdot \frac{1 - \mu^2 \sin H' \cos H''}{1 - \mu^2 \gamma H''} = -0,559962 \quad -0'',47$

$= \mu \sin H''' \cdot \frac{1 - \mu^2 \sin H'' \cos H'''}{1 - \mu^2 \gamma H'''} = -0,559465 \quad -0'',054$

tripl. term.

locidades $\gamma' g\, d\tau \cos. H'$, $\gamma' q\, d\tau \operatorname{sen}. H'$; e passadas á Lua com o sinal contrario, será a velocidade apparente della no ponto $L = h\, d\tau + 2\eta\tau\, d\tau - \gamma' g\, d\tau \cos. H'$ perpendicularmente a CK, e $\delta\, d\tau + 2\eta'\tau\, d\tau - \gamma' q\, d\tau \operatorname{sen}. H'$ parallellamente á mesma CK.

38. Agora, suppondo $\eta = 0$, $\eta' = 0$, e $d\tau = 1$, seraõ os movimentos horarios apparentes no ponto L, perpendicular e parallellamente a CK, $h - \gamma' g \cos. H'$, e $\delta - \gamma' q \operatorname{sen}. H'$. E denotando-os respectivamente por h', δ', e fazendo $\frac{\delta'}{h'} = \operatorname{tg}. \alpha'$, será α' a inclinaçaõ da orbita apparente LP com a linha Le. Abaixando sobre ella a perpendicular Sp, esta será a minima distancia, e o tempo della no instante da passagem da Lua por p. Como pois temos $SL = \Delta'$, e $LSp = \alpha'$, será $Sp = \Delta' \cos. \alpha'$, e $Lp = \Delta' \operatorname{sen}. \alpha'$; e porque o movimento horario pela direcçaõ pL he $= \frac{h'}{\cos. \alpha'}$, será o tempo por pL

$$= \frac{\Delta' \operatorname{sen}. \alpha' \cos. \alpha'}{h'},$$

e conseguintemente o tempo procurado da minima distancia

$$= T' - \frac{\Delta' \operatorname{sen}. \alpha' \cos. \alpha'}{h'}.$$

39. He por si evidente, que sendo a minima distancia maior que o semidiametro da Lua, ou que a soma dos semidiametros do Sol e da Lua, naõ he possivel eclipse de estrella no primeiro caso, nem do Sol no segundo; que sendo igual, os eclipses se reduziràõ a hum simples contacto; e que sendo menor, haverá eclipse, e tanto maior quanto ella for menor. E nos do Sol, he tambem evidente, que o excesso da soma dos semidiametros sobre a minima distancia he outro tanto quanto a ☾ ha de chegar a encubrir do disco do ☉ na maxima phase. E porque o diametro delle se costuma dividir em 12 digitos, e conseguintemente o semidiametro em 6, suppondo este $= s$, e o dito excesso $= E$, será o eclipse de $\frac{6E}{s}$ digitos: e estes boreais, estando a ☾ para o norte do ☉; austrais, estando para o sul, as quais posiçõeſ se manifestaõ por Δ' positivo no primeiro caso, negativo no segundo.

40. EXEMPLO: No mesmo caso do exemplo antecedente temos $\Delta' = -1',804$. $T' = 10^h\ 26'\ 34''$, $H' = -23^\circ\ 21'\ 30''$, $h = 23',963$, $\delta =$

13′,14, log. $g = 1.529199$, log. $q = 0.454090$, log. $\gamma' = 9.417969$. Donde achamos $h' = 15',824$, $\delta' = 13',435$, $\alpha' = 40°\ 19'\ 55''$, minima distancia $= -1',375$, e o tempo della ás $10^h\ 29'\ 56'',5$. E suppondo a soma dos semidiametros $= 30',718$, e o do $\odot$ $s = 15',933$, será $E = 29',343$, e a grandeza do eclipse de 11,05 digitos austrais.

41. He porem de advertir: Que a minima distancia calculada he a reduzida e projectada no plano de projecçaõ, e que falta o aumento optico que resulta da altura do Observador sobre o dito plano, devendo tambem o semidiametro horizontal da $\mathbb{C}$ aumentar-se na mesma rasaõ. Em quanto ao do $\odot$, posto que realmente tem tambem seu aumento em rasaõ da dita altura; com tudo, como esse aumento he para o do semidiametro da $\mathbb{C}$ como a parallaxe do mesmo $\odot$ para a da $\mathbb{C}$, apenas pode chegar a $0'',04$, e por tanto he physicamente insensivel.

42. Para haver pois toda a exactidaõ no calculo antecedente, deveria calcular-se o angulo π para o tempo achado (n. 9.). E entaõ, suppondo o semidiametro horizontal da $\mathbb{C} = \sigma$, $1 + \text{sen. } p \cos. \pi = k$, e o numero dos digitos $= d$, teriamos exactamente

$$d = \frac{6\,(k\sigma + s - k\Delta' \cos. \alpha')}{s}.$$

Donde, dividindo por k tanto o numerador, como o denominador, e suppondo $s' = \frac{s}{k} = s - s \text{ sen. } p \cos. \pi$, teremos

$$d = \frac{6\,(\sigma + s' - \Delta' \cos. \alpha')}{s'}:$$

onde deve notar-se, que o numerador representa sempre o excesso de $\sigma + s'$ sobre $\Delta' \cos. \alpha'$, ainda que este seja de si negativo; porque tornando-se entaõ em positivo pela precedencia do sinal $-$, deve entender-se que a soma $\sigma + s'$ passa para a parte opposta, e se faz negativa, sahindo tambem d negativo, e representando digitos austrais.

43. E daqui se vê tambem, que sendo na immersaõ e emersaõ das estrellas observada a distancia apparente $S = k\sigma$, essa se reduz sem calculo algum ao plano da projecçaõ, tomando $\Sigma = \sigma$; e que sendo no principio, e fim dos eclipses do $\odot$, e nos contactos internos quando elles tiverem lugar $S = s \pm \sigma k$, teremos

$$\Sigma = \frac{s}{k} \pm \sigma = s' \pm \sigma.$$

Advirta-se tambem, que na proposiçaõ deste Problema (Ephem. Vol. I. pag. 232.) em vez de γ' puzemos sen. 15°, 2 cujo logarithmo 9.418615 tem o meio entre os dos dous valores de γ' pertencentes, hum aos eclipses do ☉, e o outro aos das estrellas; e isso, porque he escusado que haja rigorosa exactidaõ nos annuncios de tais phenomenos.

44. *Dado o tempo* T' *da* ☌ *app. e a differença apparente das declinações* Δ', *achar o tempo de qualquer distancia dos centros* Σ; *e em particular o do principio, e o do fim do eclipse.*

Suppondo o tempo procurado $= T' + t$, as quantidades h', α'; as mesmas do Probl. antecedente, e fazendo mais $\cos. \phi' = \frac{\Delta' \cos. \alpha'}{\Sigma}$, será

$$t = \frac{\Sigma \text{ sen. } (\pm \phi' - \alpha')}{h'};$$

equaçaõ, que dá dous valores para t: hum para antes da minima distancia com $-\phi'$, que para distinçaõ chamaremos t; e o outro para depois com $+\phi'$, que chamaremos t'. E calculados os seus valores, tomando por Σ o semid. horiz. da ☾ nos eclipses das estrellas, e a soma dos semidiametros nos do ☉, teremos o tempo do principio $= T' + t$, e o do fim $= T' + t'$. Do mesmo modo tomando por Σ a differença dos mesmos semidiametros, acharemos os tempos dos contactos internos, quando tiverem lugar, que será quando a dita differença for maior que a minima distancia. E o angulo ϕ' he agudo ou obtuso, segundo Δ' for positivo ou negativo.

45. DEM. Supposta a construcçaõ da orbita apparente (*Fig.* 3.), e tirando do astro S para ella as rectas SP, SF iguais á distancia dada dos centros Σ; como temos $SL = \Delta'$, $LSp = \alpha'$, e $Sp = \Delta' \cos. \alpha'$ (n. 38.), se fizermos $FSp = \phi'$, será

$$\cos. \phi' = \frac{\Delta' \cos. \alpha'}{\Sigma},$$

e

$$FSL = \phi' - \alpha',$$

donde se segue

$$Fg = \Sigma \text{ sen. } (\phi' - \alpha').$$

He porem o movimento horario apparente na direcçaõ parallella a $Fg = h'$: logo o tempo de L até F será

$$= \frac{\Sigma \text{ sen. } (\phi' - \alpha')}{h'}.$$

Mas o angulo ϕ' determinado pelo seu coseno tanto pode ser $+\phi'$, como $-\phi'$: logo teremos em geral

$$t = \frac{\Sigma \text{ sen. } (\pm\phi' - \alpha')}{h'},$$

servindo $-\phi'$ para o tempo anterior de P até L, e $+\phi'$ para o posterior de L até F: Advertindo porem, que nos eclipses pequenos sendo ϕ' menor que α', ambos os tempos podem ser anteriores, ou ambos posteriores ao da ☌ apparente; anteriores, sendo α' de si positivo; posteriores, sendo negativo. Mas sempre $-\phi'$ servirá para o principio, $+\phi'$ para o fim do eclipse; e sendo $\phi' = 0$, ambos os tempos coincidiráõ em hum só, e o eclipse se reduzirá a hum simples, e momentaneo contacto.

46. EXEMPLO: Continuando o calculo do mesmo eclipse proposto, temos $T' = 10^h\ 26'\ 34''$, $\Delta' = -1',804$, $h' = 15',824$, $\alpha' = 40°\ 19'\ 55''$. Donde, suppondo a soma dos semidiametros $\Sigma = 30',718$, achamos $\phi' = \pm 92°\ 33'\ 57''$, $t = -1^h,4221$, e $t' = +1^h,5347$; e consequentemente o principio do eclipse no Lugar proposto ás $9^h\ 1'\ 14''$, e o fim ás $11^h\ 58'\ 39''$. Estes tempos porem, que nos eclipses pequenos saõ quasi exactos, saõ nos grandes, como este, menos chegados á exactidaõ, mas approximados quanto basta para os annuncios ordinarios. Se em algum caso se quizerem exactos, haverá de repetir-se o calculo da maneira que logo mostraremos.

47. *Para cada hum dos tempos calculados pelo Problema antecedente, achar a reducçaõ do semid. do ☉ (sendo delle o eclipse), a differença apparente das declinações, e os pontos do disco do ☉, em que haõ de ser os contactos; ou os da ☾, por onde ha de entrar e sahir a estrella, ou planeta eclipsado.*

Com o angulo horario do principio $H' + \gamma t$ calculem-se as quantidades $n = g \text{ sen. } (H' + \gamma t)$, $m = 6 - q \text{ cos. } (H' + \gamma t)$, $\text{tg. } \mu = \frac{n}{m}$, $\text{sen. } \pi = \frac{n}{p \text{ sen. } \mu}$; e com o do fim $H' + \gamma t'$, as suas correspondentes n', m', μ', π'. Entaõ primeiramente: Sendo o semid. do $\odot = s$, e o reduzido $= s'$, teremos para o principio

$$s' = s - s \text{ sen. } p \text{ cos. } \pi,$$

e para o fim

$$s' = s - s \text{ sen. } p \text{ cos. } \pi'.$$

48. Depois : Sendo τ o tempo ja conhecido desde a ☌ verdadeira até a apparente , e fazendo

$$M = \Delta + \delta(\tau + t) - m\ ,\quad M' = \Delta + \delta(\tau + t') - m'\ ,$$

seraõ M , M' as differenças procuradas das declinações apparentes. E finalmente : Fazendo

$$\text{cos. } \Phi = \frac{M}{\Sigma}\ ,\quad \text{cos. } \Phi' = \frac{M'}{\Sigma}$$

(que seraõ agudos ou obtusos conforme forem os numeradores M , M' positivos , ou negativos , e de si mesmos positivos depois da ☌ apparente , e antes della negativos) , os angulos $\mu - \Phi$, $\mu' - \Phi'$ daraõ os pontos do contacto nos eclipses do ☉ , sendo contados do vertice delle para occidente quando forem positivos , e para oriente quando negativos. E pelo contrario nos eclipses das estrellas , ou dos planetas , seraõ contados do ponto mais baixo da Lua para oriente quando forem positivos , e para occidente quando negativos. Na Ephemeride tomaõ-se os supplementos delles para se contarem tambem do ponto mais alto do disco da Lua.

49. DEM. Tudo fica comprehendido nas Demonstrações antecedentes , menos o que pertence aos angulos $\mu - \Phi$, $\mu' - \Phi'$. Suppondo pois que no fim do eclipse se acha o astro realmente em s (*Fig.* 3.) , he claro que tirando para a orbita verdadeira a recta $sF' = \Sigma$, estará o centro da ☾ em F' , sendo sF' a linha dos centros , cuja posiçaõ se procura a respeito do circulo vertical. Mas , tirando por s do centro da projecçaõ C a linha Cm, esta representa o vertical que passa pelo centro do astro , e o que passa pelo da Lua F' em rasaõ da sua proximidade pode tomar-se como representado por $F't$ parallella a ms. Logo o eclipse do ☉ , sendo Sn o semidiametro delle , acabará pelo contacto no ponto n , que faz com o ponto mais alto m o angulo nsm para oriente ; e huma estrella eclipsada , sendo sF' o semidiametro da ☾ , sahirá pelo ponto s do disco della , que faz com o ponto mais baixo t o angulo $tF's = msn$ para occidente.

5o. Como pois he $msn = nsE - msE$, e temos $nsE = \Phi'$, $msE = \mu'$ (n. 9.) , segue-se que $\mu' - \Phi'$ dará o angulo msn negativo para o caso representado pela construcçaõ da figura , isto he , para o de se contar do ponto mais baixo da Lua para occidente nos eclipses das estrellas , e do ponto mais alto do ☉ para oriente nos eclipses delle ; e ao contrario , quando o mesmo angulo for positivo. A mesma regra segue o angulo $\mu - \Phi$ no principio dos eclipses , tendo-se conta com o sinal e especie dos angulos μ ,

e Φ (n. 25. 48.). E quando $\mu - \Phi$, ou $\mu' - \Phi'$ passarem de 180°, tomar-se-ha o supplemento com o sinal contrario, e com elle se practicará a regra da mesma maneira.

51. EXEMPLO: Temos pois no principio do eclipse, de que tratamos, $H' = -23° 21' 30''$, $\gamma t = -21° 20' 8''$, $H' + \gamma t = -44° 41' 38''$, $\tau + t = -1^h,9819$, $n = -23',788$, $m = 39',895$, $\mu = -30° 48'$, $\pi = 59° 23'$, red. do semid. do $\odot = -0',127$, $M = -21',080$, $\Phi = -133° 33'$, e $\mu - \Phi = +102° 45'$, que marca o ponto do contacto no disco do $\odot$ contado do vertice para occidente. E no fim com o angulo horario $H' + \gamma t' = -0° 20' 16''$, e $\tau + t' = 0^h,9749$, achamos $n' = -0',1994$, $m' = 39',079$, $\mu' = -0° 17'$, $\pi' = 46° 23'$, red. do semid. do $\odot = -0',173$, $M' = +18',588$, $\Phi' = +52° 22'$, e $\mu' - \Phi' = -52° 39'$, que marca o ponto do contacto do vertice para oriente.

52. *Achar mais exactamente os tempos do principio, e do fim dos eclipses.*

A inexactidaõ dos tempos calculados da maneira acima declarada (n. 44.) vem de haver-se supposto, que a velocidade e direcçaõ do movimento apparente no ponto L (*Fig.* 3.) he constantemente a mesma por todo o tempo do eclipse de P até F; e isso bem se vê, que só pode ser sensivelmente exacto nos eclipses de pouca duraçaõ. Nos de huma duraçaõ consideravel, como he o do nosso exemplo, deveráõ seguir-se dessa supposiçaõ alguns erros sensiveis, ainda que pequenos. Porque sem embargo de poder tomar-se o movimento da Lua como sensivelmente uniforme na sua orbita de L até F', naõ succede o mesmo com o apparente de L até F, porque este involve tambem o do astro de S até s, que naõ pode tomar-se como uniforme senaõ por hum tempo muito pequeno. Suppondo por tanto o movimento apparente por $L\,F$ naõ já uniforme, mas uniformemente acceleradó, ou retardado, he sabido que o tempo por $L\,F$ será o mesmo em que esse espaço havia de ser andado uniformemente com a velocidade correspondente ao meio do mesmo tempo. E essa supposiçaõ, de que só agora podemos usar depois de termos os tempos approximados, nos dará resultados com a maior exactidaõ practica, que se pode dezejar.

53. Nos eclipses do $\odot$ ainda há outro principio de inexactidaõ em ter-se supposto $\Sigma =$ á soma dos semidiametros horizontais quando o do $\odot$ devia ser reduzido como acima mostrámos (n. 43.): o que tambem naõ podia fazer-se no primeiro calculo, por depender a reducçaõ dos mesmos tempos que se procuravaõ. Agora porém, sendo pelo Probl. antecedente achadas

as reducções $-0',127$, $-0',173$, e suppondo a soma dos semidiametros horizontais $= 30',621$, teremos para o principio do eclipse $\Sigma = 30',494$, e para o fim $\Sigma = 30',448$. E assim naõ ha mais do que repetir o calculo do n. 44. separadamente para cada hum dos tempos, sendo as quantidades h', δ', α' calculadas para o principio com o angulo horario $H' + \frac{1}{2}\gamma t$, e para o fim com $H' + \frac{1}{2}\gamma t'$ em vez de H'.

54. EXEMPLO: Temos pois para o principio do nosso eclipse $\Sigma = 30',494$, $H' + \frac{1}{2}\gamma t = -34°\ 1'\ 34''$, e acharemos $h' = 16',626$ (tendo-se attendido o pequeno termo $2\eta\tau$ (n. 37.), que aqui se torna em $2\eta(\tau + \frac{1}{2}t) = +0',011$), $\delta' = 13',557$, $\alpha' = 39°\ 11'\ 40''$, $\phi' = -92°\ 37'\ 40''$, e $t = -1^h,36683 = -1^h\ 22'\ 0'',6$: donde vem o principio ás $9^h\ 4'\ 33'',4$, que he sensivelmente o mesmo tempo de que tinhamos partido para achar a distancia reduzida $\Sigma = 30',494$ (n. 28.). E para o fim temos $\Sigma = 34',448$, $H' + \frac{1}{2}\gamma t' = -11°\ 50'\ 53''$, e achamos $h' = 15',287$, $\delta' = 13',293$, $\alpha' = 41°\ 0'\ 30''$, $\phi' = +92°\ 33'\ 15''$, $t' = +1^h,5594$, e o fim do eclipse ás $12^h\ 0'\ 8''$.

§. IV.

Calculo inverso dos Eclipses em Lugares determinados.

55. Assim como no calculo directo, suppondo os elementos dados pelas Taboas astronomicas, e a Longitude do Lugar, determinamos os phenomenos dos eclipses; assim no inverso, tornando das observações para os elementos procuramos saber os erros delles, e acertar as Longitudes dos Lugares, onde se fizeraõ as mesmas observações. Em quanto a este ultimo artigo, como achamos immediatamente o tempo da conjunçaõ em A. R. he claro que sem mais reducçaõ alguma a differença dos tempos contados nos ditos Lugares no instante physico da mesma conjunçaõ dará a differença das Longitudes delles. Em quanto porém aos elementos, como as Taboas daõ immediatamente a Longitude e Latitude da Lua, convem reduzir os resultados para se fazer a comparaçaõ; e por tanto começaremos por essa reducçaõ.

56. *Dado o tempo da* ☌ *em A. R. e a differença das declinações no instante della, achar o da* ☌ *em Longitude, e a differença das Latitudes nesse mesmo instante.*

Seja - - - - - - - - -
o tempo da ☌ em A. R. - - - - - $= T$
a differença das declinações - - - - - $= \Delta$
o tempo da ☌ em long. - - - - - - $= T + t$
a differença das latitudes - - - - - - $= \Lambda$
a A. R. do astro - - - - - - - $= A$
a sua latitude - - - - - - - $= L$
e a obliquidade da ecliptica - - - - - $= E$.

Suppostas as definições de h, η, δ, η' (n. 16.), e fazendo

$$\frac{\delta + \eta' t}{h + \eta t} = \text{tg. } \alpha \text{ , e } \frac{\text{sen. } E \cos. A}{\cos. L} = \text{sen. } \lambda \text{ , teremos}$$

$$\Lambda = \frac{\Delta \cos. \alpha}{\cos. (\alpha - \lambda)} \text{ , } t = - \frac{\Lambda \text{ sen. } \lambda}{h + \eta t} \text{ ,}$$

e conseguintemente

$$\text{temp. } ☌ \text{ em Long.} = T - \frac{\Lambda \text{ sen. } \lambda}{h + \eta t} .$$

O angulo λ he sempre agudo, e positivo no primeiro e ultimo quadrante de A, negativo nos outros dous; e α sempre tambem agudo, e positivo ou negativo conforme o for o numerador da sua tangente. E o calculo se faz primeiro, suppondo $\eta' = 0$, e $\eta = 0$; e depois se repete, usando já dos termos $\eta' t$, ηt, conhecidos pelo valor de t proximamente achado: o que sómente será necessario, quando elle for algum tanto consideravel.

57. DEM. Sendo a ☌ em A. R. quando a ☾ passa pelo meridiano fixo, isto he, pelo circulo de declinaçaõ do astro CM em K (*Fig.* 4.), e a ☌ em Long. quando passa pelo circulo de Latitude do mesmo astro CX no ponto l; he claro, que tirando lq perpendicular a CK, e sendo t o tempo de l até K, teremos $lq = ht + \eta t^2$ (n. 21.), $Kq = \delta t + \eta' t^2$, e a inclinaçaõ da orbita $Klq = \alpha$ será conhecida pela equaçaõ

$$\text{tg. } \alpha = \frac{\delta t + \eta' t^2}{ht + \eta t^2} .$$

Mas, tirando Cp perpendicular á orbita, he $KCp = \alpha$, e o angulo de posiçaõ $KCl = \lambda$ se acha pela equaçaõ sabida

$$\text{sen. } \lambda = \frac{\text{sen. } E \cos. A}{\cos. L} :$$

logo

$$Cp = \Delta \cos. \alpha \text{ , } Cl = \frac{\Delta \cos. \alpha}{\cos. (\alpha - \lambda)} = \Lambda \text{ ,}$$

e $lq = \Lambda$ sen. $\lambda = h t + \eta t^2$, donde se tira

$$t = \frac{\Lambda \text{ sen. } \lambda}{h + \eta t}.$$

E porque este tempo que suppuzemos de l para K, ha de ser de K para l, será

$$\text{o tempo da } \odot \text{ em long.} = T - \frac{\Lambda \text{ sen. } \lambda}{h + \eta t}.$$

58. EXEMPLO: Suppondo $T = 11^h\ 0'\ 9'',3$, $h = 23',953$, $\eta = -0',0045$, $\delta = 13',14$, $\eta' = 0$ (n. 28.), e sendo $A = 11^o\ 12'\ 35''$, $E = 23^o\ 28'\ 21''$, $L = 0$, achamos $\lambda = 22^o\ 59'\ 55''$. Donde, suppondo $\eta = 0$, temos $\alpha = 28^o\ 44'\ 53''$, $\Lambda = 39'\ 31'',7$, $t = -0^h\ 38'\ 41'',1$, e o tempo procurado da $\odot$ em Long. ás $10^h\ 21'\ 28'',2$. A repetiçaõ do calculo, visto que $\eta t = 0',003$, naõ altéra estes resultados em cousa sensivel; e elles saõ tambem sensivelmente os mesmos $39'\ 32''$, e $10^h\ 21'\ 28''$, que juntamente com os movimentos horarios em Longitude, e Latitude nos serviráõ para os calcular em A. R. e Decl. e para deduzir o tempo da $\odot$ em A. R., e a differença das declinações no instante della.

59. *Sendo dada a differença das declinações* Δ *no instante da* $\odot$ *em A. R., e observada huma distancia apparente dos centros* S *em hum tempo* T, *achar o da mesma conjunçaõ.*

Suppostas as definições antecedentes (n. 16. 17.), e sendo o tempo decorrido desde a $\odot$ até o da observaçaõ $= t$, buscaremos primeiro

$$\Sigma = S - S \text{ sen. } p \cos. \pi \text{ (n. 22.)}.$$

E depois, para abbreviar, fazendo

$$a = n + \frac{p' n t}{2p} - \eta t^2,$$

$$b = \Delta - m - \frac{p' m t}{2p} + \eta' t^2 + d' t \text{ sen. } p \cos. \pi,$$

$$\text{tg. } \alpha = \frac{\delta}{h}, \quad \text{tg. } \psi = \frac{a}{b},$$

$$\cos. \lambda = \frac{a \cos. (\psi - \alpha)}{\Sigma \text{ sen. } \psi} = \frac{b \cos. (\psi - \alpha)}{\Sigma \cos. \psi},$$

teremos

$$t = \frac{\Sigma \cos. \alpha \text{ sen. } (\psi - \alpha \pm \lambda)}{h \cos. (\psi - \alpha)},$$

$$\text{temp. da } \odot = T - t.$$

60. O angulo α he sempre agudo, e positivo ou negativo conforme o for δ; ψ leva o sinal de a, e he agudo ou obtuso segundo for b positivo, ou negativo; e λ segue a especie de $\psi - \alpha$, e toma-se com o sinal $-$, ou $+$, segundo for a observaçaõ antes, ou depois da passagem da Lua pela perpendicular tirada do centro do astro para a orbita relativa della: na qual passagem he $\lambda = 0$, e $t = \frac{\Sigma \cos.\ \alpha \operatorname{tg.} (\psi - \alpha)}{h}$. Para o calculo dos pequenos termos dependentes do mesmo tempo t, que se busca, basta conhecello pouco mais ou menos pelo da conjunçaõ no meridiano das Taboas combinado com a differença de Longitude entre elle e o do Lugar da observaçaõ, conhecida tambem proximamente. E de outra sorte: Busca-se, sem elles, por hum primeiro calculo o tempo t, com o qual seraõ conhecidos, para se repetir o mesmo calculo com toda a exactidaõ.

61. DEM. Suppostas as definições de a, e de b, temos

$$h t - a = \Sigma \operatorname{sen.} \phi,\ \delta t + b = \Sigma \cos.\ \phi \text{ (n. 22.)}.$$

E quadrando estas equações, somando, e transpondo, teremos

$$t^2 (h^2 + \delta^2) - 2 (a h - b \delta) t = \Sigma^2 - (a^2 + b^2).$$

Mas fazendo $\operatorname{tg.} \alpha = \frac{\delta}{h}$, e $\operatorname{tg.} \psi = \frac{a}{b}$, he

$$h^2 + \delta^2 = h^2 (1 + \operatorname{tg.}^2 \alpha) = \frac{h^2}{\cos.^2 \alpha},$$

$$a^2 + b^2 = b^2 (1 + \operatorname{tg.}^2 \psi) = \frac{b^2}{\cos.^2 \psi},$$

e

$$a h - b \delta = h b (\operatorname{tg.} \psi - \operatorname{tg.} \alpha) = \frac{h b \operatorname{sen.} (\psi - \alpha)}{\cos.\ \psi \cos.\ \alpha}.$$

Logo teremos

$$\frac{h^2 t^2}{\cos.^2 \alpha} - \frac{2 h t}{\cos.\ \alpha} \cdot \frac{b \operatorname{sen.} (\psi - \alpha)}{\cos.\ \psi} = \Sigma^2 - \frac{b^2}{\cos.^2 \psi},$$

donde se segue

$$\frac{h t}{\cos.\ \alpha} = \frac{b \operatorname{sen.} (\psi - \alpha)}{\cos.\ \psi} \pm \sqrt{\left(\Sigma^2 - \frac{b^2}{\cos.^2 \psi} + \frac{b^2 \operatorname{sen.}^2 (\psi - \alpha)}{\cos.^2 \psi} \right)}.$$

He porém

$$\Sigma^2 - \frac{b^2}{\cos.^2 \psi} + \frac{b^2 \operatorname{sen.}^2 (\psi - \alpha)}{\cos.^2 \psi} = \Sigma^2 - \frac{b^2 \cos.^2 (\psi - \alpha)}{\cos.^2 \psi}$$

$$= \Sigma^2 \left(1 - \frac{b^2 \cos.^2(\psi - \alpha)}{\Sigma^2 \cos.^2 \psi} \right)$$

$$= \Sigma^2 \operatorname{sen}^2 \lambda ,$$

tendo-se feito $\cos. \lambda = \frac{b \cos. (\psi - \alpha)}{\Sigma \cos. \psi}$. Logo

$$\frac{h t}{\cos. \alpha} = \frac{b \operatorname{sen}. (\psi - \alpha)}{\cos. \psi} \pm \Sigma \operatorname{sen}. \lambda .$$

E substituindo no primeiro termo do segundo membro o valor de $b = \frac{\Sigma \cos. \psi \cos. \lambda}{\cos. (\psi - \alpha)}$, será

$$\frac{h t}{\cos. \alpha} = \Sigma \left(\operatorname{tg}. (\psi - \alpha) \cos. \lambda \pm \operatorname{sen}. \lambda \right) = \frac{\Sigma \operatorname{sen}. (\psi - \alpha \pm \lambda)}{\cos. (\psi - \alpha)} ,$$

e conseguintemente

$$t = \frac{\Sigma \cos. \alpha \operatorname{sen}. (\psi - \alpha \pm \lambda)}{h \cos. (\psi - \alpha)} .$$

62. EXEMPLO: Supponhamos que no mesmo eclipse de 1764 se observou em Londres ás $9^h\ 4'\ 33''$ a distancia apparente dos centros $S = 30', 742$ no principio do eclipse, e por tanto antes da passagem da Lua pela perpendicular á orbita. Usando das mesmas quantidades já calculadas (n. 27. 28.), suppondo t proximamente conhecido de $1^h, 95$, que dá $\eta t^2 = 0', 017$, e fazendo $\eta' = 0$, $p' = 0$, $d' = 0$, como no lugar citado: temos $h = 23', 953$, $\delta = 13', 140$, $a = -23', 419$, $b = 4', 991$; e conseguintemente $\alpha = 28^\circ\ 44'\ 53''$, $\psi = -77^\circ\ 58'\ 10''$, $\psi - \alpha = -106^\circ\ 43'\ 3''$, $\lambda = \pm 103^\circ\ 3'\ 16''$, e no caso presente $\psi - \alpha - \lambda = -209^\circ\ 46'\ 19'' = 360^\circ - 209^\circ\ 46'\ 19'' = +150^\circ\ 13'\ 41''$ (n. 24.). Donde concluimos $t = -1^h, 92672$, e o tempo da ☌ ás $11^h\ 0'\ 9'', 2$ justamente o mesmo que no calculo directo tinhamos supposto para achar a sobredita distancia.

63. A fórma, que aqui démos á soluçaõ deste Problema, naõ differe da que propuzemos no Vol. I. das Ephemerides pag. 237, senaõ em se haver posto η, η', λ em vez de h', δ', γ, e em se haver involvido em ψ todo o effeito das quantidades $h't$, $\delta't$. Mas note-se, que lá em $h' = B \cos. D'$, faltou o termo $-\frac{1}{2} \delta \operatorname{sen}. h \operatorname{tg}. D'$ (n. 21.), em que entaõ se naõ advertio, desprezando-se tambem os outros pequenos termos dependentes de d', p', que agora se ajuntáraõ, para se attender ao effeito delles nos casos, em que se quizer a maior exactidaõ.

64. *Sendo observadas duas distancias apparentes* S, S', *nos tempos* T, T', *achar o da conjunçaõ em A. R., e a differença das declinações* Δ *no instante della.*

Sejaõ H, H', os angulos horarios correspondentes aos tempos T, T', e os tempos contados desde a conjunçaõ t, e t'. Calculem-se para o tempo T as quantidades m, n, π, e para T' as suas correspondentes m', n', π', com as quais acharemos as distancias reduzidas $\Sigma = S - S \text{ sen. } p \text{ cos. } \pi$, e $\Sigma' = S' - S' \text{ sen. } p \text{ cos. } \pi$. E entaõ fazendo $T' - T = \tau$, e calculando as quantidades seguintes

$$a = n + \frac{p' n t}{2p} - \eta t^2, \quad a' = n' + \frac{p' n' t'}{2p} - \eta t'^2$$

$$e = m + \frac{p' m t}{2p} - \eta' t^2 - d' t \text{ sen. } p \text{ cos. } \pi,$$

$$e' = m' + \frac{p' m' t'}{2p} - \eta' t'^2 - d' t' \text{ sen. } p \text{ cos. } \pi',$$

$$b = \delta\tau + e - e', \qquad c = h\tau + a - a',$$

$$\text{tg. } \kappa = \frac{c}{b} \qquad \sigma = \frac{(\Sigma'^2 - \Sigma^2) \text{ sen.}^2 \kappa}{c}$$

$$\text{cos. } \omega = \frac{\sigma - c}{2\Sigma \text{ sen. } \kappa}$$

ou

$$\text{cos. } \omega' = \frac{\sigma + c}{2\Sigma' \text{ sen. } \kappa},$$

$$\phi = \kappa \mp \omega$$

ou

$$\phi' = \kappa \mp \omega',$$

teremos

$$t = \frac{\Sigma \text{ sen. } \phi + a}{h}, \quad t' = \frac{\Sigma' \text{ sen. } \phi' + a'}{h}$$

$$\Delta = \Sigma \text{ cos. } \phi - \delta t + e = \Sigma' \text{ cos. } \phi' - \delta t' + e',$$

e o tempo da $\sigma = T - t = T' - t'$.

65. Nos eclipses das estrellas escusa-se a reducçaõ das distancias apparentes tanto na immersaõ, como na emersaõ, porque em ambos os casos ainda que S e S' sejaõ differentes, ambos pela reducçaõ se convertem no semidiametro horizontal $= \Sigma$; e por isso se escusa tambem o calculo de $\sigma = o$. Nos do Sol, basta que se reduza o semidiametro delle, como aci-

ma dissemos (n. 53.). O angulo κ he sempre positivo, como o numerador da sua tangente c, e agudo ou obtuso conforme for o denominador b positivo, ou negativo. E os angulos ω, e ω' seraõ agudos ou obtusos, segundo for positiva ou negativa a expressaõ do seu respectivo coseno; e em $\kappa \pm \omega$, $\kappa \pm \omega'$, tomaõ-se com o sinal — quando o centro da Lua passar ao norte, e com + quando passar ao sul do centro do astro: advertindo-se o que ja dissemos (n. 24.) nos casos em que alguma das somas ou differenças dos ditos angulos venha maior que 180°.

66. DEM. Suppostas as definições de e, e de e', será

$$\Delta + \delta t - e = \Sigma \cos. \phi ,$$

e

$$\Delta + \delta t' - e' = \Sigma' \cos. \phi' \text{ (n. 22.)},$$

e a differença destas equações, considerando que $t' - t = T' - T = \tau$, e fazendo $\delta\tau + e - e' = b$, dará

$$b + \Sigma \cos. \phi = \Sigma' \cos. \phi'.$$

Do mesmo modo das duas equações $h t - a = \Sigma \text{ sen. } \phi$, e $h t' - a' = \Sigma' \text{ sen. } \phi'$, fazendo $h\tau + a - a' = c$, concluiremos

$$c + \Sigma \text{ sen. } \phi = \Sigma' \text{ sen. } \phi'.$$

E somando o quadrado desta equaçaõ com o da outra $b + \Sigma \cos. \phi = \Sigma' \cos. \phi'$, teremos

$$b^2 + c^2 + 2\Sigma (b \cos. \phi + c \text{ sen. } \phi) = \Sigma'^2 - \Sigma^2.$$

Mas, fazendo $\text{tg. } \kappa = \frac{c}{b}$, he

$$c^2 + b^2 = c^2 (1 + \text{cot. } \kappa^2) = \frac{c^2}{\text{sen.}^2 \kappa},$$

e

$$2\Sigma (b \cos. \phi + c \text{ sen. } \phi) = 2c\Sigma (\text{sen. } \phi + \cos. \phi \text{ cot. } \kappa) = \frac{2c\Sigma \cos. (\phi - \kappa)}{\text{sen. } \kappa}.$$

Logo teremos

$$2\Sigma \text{ sen. } \kappa \cos. (\phi - \kappa) = \frac{(\Sigma'^2 - \Sigma^2) \text{ sen.}^2 \kappa}{c} - c;$$

e por conseguinte fazendo $\frac{(\Sigma'^2 - \Sigma^2) \text{ sen.}^2 \kappa}{c} = \sigma$, e $\frac{\sigma - c}{2\Sigma \text{ sen. } \kappa} = \cos. \omega$, será

$$\cos. (\phi - \kappa) = \cos. \omega, \quad \phi - \kappa = \pm \omega,$$

e

$$\phi = \kappa \pm \omega.$$

Donde resulta

$$t = \frac{\Sigma \text{ sen. } \phi + a}{h}, \quad \Delta = \Sigma \cos. \phi - \delta t + e,$$

e o tempo da $\odot = T - t$.

67. Dando ás mesmas duas equações a fórma $\Sigma' \cos. \phi' - b = \Sigma \cos. \phi$, e $\Sigma' \text{ sen. } \phi' - c = \Sigma \text{ sen. } \phi$, e fazendo as mesmas operações, eliminaremos ϕ, e teremos outra soluçaõ por meio de ϕ'. E assim, sendo κ e σ as mesmas, naõ ha mais do que em vez de ω servir-nos de ω', sendo

$$\cos. \omega' = \frac{\sigma + c}{2\Sigma' \text{ sen. } \kappa}.$$

Donde se segue

$$\phi' = \kappa \pm \omega', \quad t' = \frac{\Sigma' \text{ sen. } \phi' + a'}{h}, \quad \Delta = \Sigma' \cos. \phi' - \delta t' + e',$$

e o tempo da $\odot = T' - t'$.

68. EXEMPLO: Em Vienna d'Austria por 48° 12' 30" de Latitude boreal foi observado o principio do mesmo eclipse ás 10^h 22' 5", sendo a distancia apparente dos centros $S = 30', 7783$; e o fim á 1^h 22' 54", sendo entaõ $S' = 30', 8017$, e passando a Lua ao norte do Sol. Supondo pois a mesma ellipticidade da Terra, teremos $P = 47°$ 53' 20", e $p = 53', 993$. E como h, δ, η saõ os mesmos para todos os Lugares, e aqui temos $\tau = 3^h, 01361$, e sabemos que he proximamente $t = -1^h, 7$, e $t' = +1^h, 3$, teremos $h\tau = 72', 185$, $\delta\tau = 39', 599$, $\eta t^2 = -0', 013$, $\eta t'^2 = -0, 0076$.

69. Isto supposto: Temos para o principio $H = -24°$ 28' 44", $n = -15', 002$, $m = 37', 140$, $\pi = 47°$ 53', $\Sigma = 30', 453$, $a = -14', 813$, $e = 37', 140$; e para o fim $H' = 20°$ 43' 30", $n' = 12', 813$, $m' = 37', 063$, $\pi' = 46°$ 34', $\Sigma' = 30', 468$, $a' = 12', 8206$, $e' = 37', 063$. Donde se acha $b = 39', 676$, $c = 44', 3754$, $\kappa = 48°$ 12' 0", $\sigma = 0', 0114$, $\omega' = \pm 167°$ 42' 50", e $\omega' = \pm 12°$ 16' 50". E porque no caso presente deve servir o sinal —, teremos $\phi = -119°$ 30' 50", e $\phi' = 35°$ 55' 10". Com ϕ achamos $t = -1^h, 73217$; e com ϕ', $t' = 1^h, 28145$: cada hum dos quais dá finalmente $\Delta = 44', 898$, e a $\odot$ ás 12^h 6' 1". E estes resultados, sendo reduzidos á ecliptica (n. 56.), daõ a $\odot$ em Long. ás 11^h 27' 18", e a differença das Latitudes, ou neste caso a Latitude da $\mathbb{C} = 39'$ 33", 7. M. du Séjour (pag. 293.) achou 11^h 27' 17", e 39' 32", 7.

70. He porém de advertir, que nos eclipses centrais, ou quasi centrais, naõ pode fazer-se uso conveniente deste Problema, seja qual for o meio

da soluçaõ delle; porque os mais leves erros nas observações os influem muito grandes nas duas quantidades que se buscaõ. E isso vem de ser entaõ o angulo o muito proximo a 0°, ou 180°, e de receber conseguintemente huma variaçaõ muito grande por huma muito pequena no seu coseno: e até succederá alguma vez, que por hum pequeno erro se ache o dito coseno maior que o raio, e se faça o angulo o imaginario, e mostre a impossibilidade do caso, justamente a mesma que a de inscrever no circulo huma corda maior que o diametro. Essas observações com tudo naõ seraõ de todo inuteis, porque cada huma dellas combinada com a differença das declinações conhecida por observações feitas em outro Lugar, onde o eclipse naõ fosse proximo a central, dará pelo Problema antecedente o tempo da ☌, e o meio dos dous resultados poderá tomar-se como exacto.

Sobre a soluçaõ deste Problema note-se tambem o mesmo que advertimos a respeito do antecedente (n. 63.).

71. *Sendo observada a minima distancia apparente dos centros S no tempo T, achar o da* ☌, *e a differença das declinações* Δ *no instante della.*

Suppostas as definições do Problema antecedente, e as de

$$h' = h - \gamma' g \cos. H,$$

e

$$\delta' = \delta - \gamma' q \text{ sen. } H \text{ (n. 37.)},$$

faça-se

$$\text{tg. } \kappa = \frac{h'}{\delta'}, \quad \phi = \kappa \pm 90°,$$

e será

$$t = \frac{\Sigma \text{ sen. } \phi + a}{h}, \quad \Delta = \Sigma \cos. \phi - \delta t + e,$$

$$\text{temp. da } ☌ = T - t.$$

72. DEM. Considerando este Problema, como hum caso particular do antecedente, supponhamos duas observações infinitamente vizinhas, coincidentes ambas no mesmo instante T, e em ambas observada a mesma distancia reduzida Σ, porque como minima naõ tem variaçaõ nenhuma em hum tempo infinitamente pequeno. Entaõ he evidente, que teremos

$$h\tau = h(t' - t) = h\,dt, \quad -(a' - a) = -da = -\gamma' g\,dt \cos. H,$$

e

$$-(e' - e) = -de = -\gamma' q\,dt \text{ sen. } H.$$

Logo

$$b = (\delta - \gamma' q \text{ sen. } H)\,dt = \delta'\,dt,$$

e

$$c = (h - \gamma' g \cos. H)\, dt = h'\, dt,$$

donde se segue

$$\text{tg. } \kappa = \frac{c}{b} = \frac{h'}{\delta'}.$$

E porque $\Sigma'^2 - \Sigma^2 = 0$, será tambem $\sigma = 0$, e $\cos. \omega = \frac{-h'\, dt}{2\, \Sigma \text{ sen. } \kappa} = 0$ dará $\omega = \pm 90°$, e será

$$\phi = \kappa \pm 90°,$$

donde se conclue o resto como no Problema antecedente, tomando-se do mesmo modo 90° com o sinal — quando a ☾ passar ao norte, e com + quando passar ao sul do centro do ☉.

73. EXEMPLO: No mesmo eclipse foi observada em Londres por M. Short a minima distancia dos centros $S = 1' 21'', 4$ ás $10^h 30' 44''$, ficando o da ☾ para o sul. Com o angulo horario $H = -22° 19' 0''$, e com as quantidades h, δ, 6, g, q já calculadas (n. 30.), teremos pois $n = -12', 843$, $m = 39', 285$, $\pi = 49° 58'$, e a minima distancia reduzida $\Sigma = 1', 343$. E calculando as quantidades $h' = 15', 7616$, e $\delta' = 13', 423$, acharemos $\kappa = 49° 34' 50''$, e conseguintemente $\phi = 139° 34' 50''$. Donde concluimos $t = -0^h, 4998$, $\Delta = 44', 831$, e a ☌ ás $11^h 0' 43''$; resultados, que sendo reduzidos á ecliptica (n. 56.), daõ a ☌ em Long. ás $10^h 22' 3''$ com a Latitude da ☾ $39' 30''$, 2. M. du Séjour (pag. 303.) achou $11^h 22' 2''$, e $39' 30'', 3$.

74. Mas he de advertir, que démos aqui este Problema mais pela singularidade delle na theorica, do que pelo uso na practica. Como a minima distancia he a mesma sensivelmente por algum tempo, só por mero acaso se ajuizará pela observaçaõ o verdadeiro instante della, e o erro nessa parte affectará notavelmente os resultados, principalmente o do tempo da ☌, como se vê no mesmo exemplo antecedente. Para ter resultados de mais confiança, seria conveniente que se fizessem muitas observações antes e depois da minima distancia, quando ella ainda diminuia, e quando já crescia sensivelmente, das quais por interpolaçaõ se concluisse o instante em que ella tinha sido a minima.

75. *Sendo observadas tres distancias apparentes S, S', S'' nos tempos T, T', T'', achar o tempo da conjunçaõ T^o, a differença das declinações Δ, e a das parallaxes p.*

Com estes mesmos elementos dados pelas Taboas, ou com quaisquer ou-

tros arbitrarios, más pouco differentes delles, calculem-se para os tempos T, T', T'' as quantidades respectivas m, n, μ, π; m', n', μ', π'; m'', n'', μ'', π'': donde teremos as distancias reduzidas

$$\Sigma = S - \bar{S} \text{ sen. } p \cos. \pi,$$
$$\Sigma' = S' - S' \text{ sen. } p \cos. \pi',$$
$$\Sigma'' = S'' - S'' \text{ sen. } p \cos. \pi''.$$

E continuando o calculo com os mesmos elementos hypotheticos, procuremos o que elles daõ para Σ, Σ', Σ'', e notemos as differenças, fazendo

$$\Sigma \text{ observado} - \Sigma \text{ calculado} = d\Sigma$$
$$\Sigma' \text{ observado} - \Sigma' \text{calculado} = d\Sigma'$$
$$\Sigma'' \text{ observado} - \Sigma'' \text{calculado} = d\Sigma''.$$

E entaõ fazendo $\text{tg. } \alpha = \frac{\delta}{h}$, e calculando as quantidades seguintes

$$A = \frac{h \text{ sen. } (\phi + \alpha)}{\cos. \alpha}, \quad A' = \frac{h \text{ sen. } (\phi' + \alpha)}{\cos. \alpha}, \quad A'' = \frac{h \text{ sen. } (\phi'' + \alpha)}{\cos. \alpha},$$

$$B = \text{sen. } \pi \cos. (\mu - \phi), \; B' = \text{sen. } \pi' \cos. (\mu' - \phi'), \; B'' = \text{sen. } \pi'' \cos. (\mu'' - \phi''),$$

$$F = A \cos. \phi' - A' \cos. \phi, \quad G = B \cos. \phi' - B' \cos. \phi,$$
$$F' = A' \cos. \phi'' - A'' \cos. \phi', \quad G' = B' \cos. \phi'' - B'' \cos. \phi',$$
$$f = d\Sigma' \cos. \phi - d\Sigma \cos. \phi', \quad K = FG' - F'G,$$
$$f' = d\Sigma'' \cos. \phi' - d\Sigma' \cos. \phi'', \quad k = Ff' - F'f,$$

teremos

$$dp = \frac{k}{K}, \; dT^{\circ} = \frac{f - G\,dp}{F},$$

$$d\Delta = \frac{d\Sigma + A\,dT^{\circ} + B\,dp}{\cos. \phi}.$$

76. DEM. He claro, que se os elementos hypotheticos fossem exactos, as distancias reduzidas, calculadas por elles para os tempos dados, deveriaõ coincidir com as observadas, que suppomos exactas. Seraõ logo as differenças produzidas pelos erros dos ditos elementos; e se for conhecida a relaçaõ que com elles tem, serviráõ para os determinar. Dos elementos dados pelas Taboas Astronomicas sómente os movimentos horarios se podem considerar como exactos, e ainda mais exactos do que se poderiaõ deduzir immediatamente das observaçoes; nos mais he que ainda

resta alguma incerteza, assim como na ellipticidade da Terra. Por ora só tratamos dos que pertencem á Lua.

77. Suppondo pois, que pelos elementos hypotheticos achamos para hum tempo T a distancia dos centros reduzida Σ (n. 16.), convem saber a variaçaõ della $d\Sigma$, que ha de resultar de se mudar o tempo da conjunçaõ, que denotaremos por $T°$, em $T° + dT°$; a differença das declinações Δ, em $\Delta + d\Delta$; e a differença das parallaxes p, em $p + dp$. Para isso temos

$$\Sigma^2 = M^2 + N^2 \text{ (n. 22.)},$$

e conseguintemente

$$\Sigma\, d\Sigma = M\,dM + N\,dN,$$

e

$$d\Sigma = \frac{M}{\Sigma}\, dM + \frac{N}{\Sigma}\, dN = dM \cos.\, \phi + dN \text{ sen. } \phi.$$

E advertindo, que na differenciaçaõ de M, e N, podemos deixar a dos pequenos termos, que seria da segunda ordem em rasaõ dos pequenos coefficientes delles, teremos

$$dM = d\Delta + \delta\, dt - \frac{m}{p}\, dp,$$

e

$$dN = h\, dt - \frac{n}{p}\, dp.$$

Donde, reflectindo que por ser $t = T - T°$, he $dt = -dT°$, será

$$d\Sigma = d\Delta \cos.\, \phi - dT° \,(h \text{ sen. } \phi + \delta \cos.\, \phi) - \frac{dp}{p}\,(n \text{ sen. } \phi + m \cos.\, \phi).$$

Mas pela suppositaõ de $\text{tg. } \alpha = \frac{\delta}{h}$ temos

$$h \text{ sen. } \phi + \delta \cos.\, \phi = \frac{h \text{ sen. } (\alpha + \phi)}{\cos.\, \alpha};$$

e pelas de $\text{tg. } \mu = \frac{n}{m}$, e $\text{sen. } \pi = \frac{m}{p \cos.\, \mu}$, temos tambem

$$n \text{ sen. } \phi + m \cos.\, \phi = \frac{m \cos.\, (\mu - \phi)}{p \cos.\, \mu} = \text{sen. } \pi \cos.\, (\mu - \phi).$$

Logo fazendo

$$\frac{h \text{ sen. } (\alpha + \phi)}{\cos.\, \alpha} = A,\ \text{sen. } \pi \cos.\, (\mu - \phi) = B,$$

e similhantemente A', B', A'', B'' para as outras duas observações, teremos para determinar $d\Delta$, dT^{o}, dp, as tres equações seguintes

$$\begin{aligned} d\Delta \cos.\phi - A\,dT^{o} - B\,dp &= d\Sigma, \\ d\Delta \cos.\phi' - A'dT^{o} - B'dp &= d\Sigma', \\ d\Delta \cos.\phi'' - A''dT^{o} - B''dp &= d\Sigma'', \end{aligned}$$

que se resolvem da maneira proposta, como he sabido.

78. EXEMPLO: Supponhamos que em Vienna alem das duas distancias, de que ja nos servimos (n. 68.), se tinha observado tambem a distancia 20' 18",2 ás 10^{h} 54'; e tomemos por elementos hypotheticos $T^{o} = 12^{h}\,4'$, $\Delta = 44',489$, $p = 54',293$. Com elles acharemos o resultado seguinte:

$T = 10^{h}\,22'\,5''$	$T' = 10^{h}\,54'\,0''$	$T'' = 1^{h}\,22'\,54''$
$S = 30',7783$	$S' = 20',3032$	$S'' = 30',8017$
$H = -24^{o}\,28'\,44''$	$H' = -16^{o}\,30'\,0''$	$H'' = 20^{o}\,43'\,30''$
$n = -15',0857$	$n' = -10',3403$	$n'' = 12',8839$
$m = 37,3472$	$m' = 37,1980$	$m'' = 37,2701$
$\mu = -21^{o}\,59'\,43''$	$\mu' = -15^{o}\,32'\,5''$	$\mu'' = 19^{o}\,4'\,10''$
sen. $\pi = 9.870333$	sen. $\pi' = 9.851939$	sen. $\pi'' = 9.861129$
red. $= -0',3259$	red. $= -0',2254$	red. $= -0',3343$
$\Sigma = 30,4524$	$\Sigma' = 20,0778$	$\Sigma'' = 30,4674$
$t = -1^{h},69861$	$t' = -1^{h},16667$	$t'' = 1^{h},315$
$ht = -40',6867$	$ht' = -27',9451$	$ht'' = 31',4981$
$\eta t^{2} = -0,0129$	$\eta t'^{2} = -0,0061$	$\eta t''^{2} = -0,0077$
$N = -25,6139$	$N' = -17,6109$	$N'' = 18,6065$
$M = -15,1689$	$M' = -8,0390$	$M'' = 24,5070$
$\phi = -120^{o}\,38'\,4''$	$\phi' = -114^{o}\,32'\,7''$	$\phi'' = 37^{o}\,12'\,25''$
$\Sigma = 29',7687$	$\Sigma' = 19',3593$	$\Sigma'' = 30',7700$
$d\Sigma = 0',6837$	$d\Sigma' = 0',7185$	$d\Sigma'' = -0',3026$
$l\cos.\phi = -9.707194$	$l\cos.\phi' = -9.618313$	$l\cos.\phi'' = 9.901162$
$lA = -1.436248$	$lA' = -1.435309$	$lA'' = 1.397058$
$lB = -9.047035$	$lB' = -9.046298$	$lB'' = 9.838995$
$lF = -0.405705$	$lG = -8.017572$	$lf = -8.914914$
$lF' = -1.054621$	$lG' = 9.296700$	$lf' = -9.649918$
$lK = -9.793829$	$lk = 9.310460$	
$dp = -0',3236$	$dT^{o} = +0^{h},0336$	$d\Delta = +0',3893$

79. Applicando pois estas correcções aos elementos hypotheticos, temos $T^{\circ} = 12^{h}\ 4' + 0^{h},0336 = 12^{h}\ 6'\ 1''$, justamente o mesmo que tinhamos achado pelas duas observações (n. 69.); $\Delta = 44',489 + 0',3893 = 44',8783$, que differe $1'',2$ do que tambem se achou; e $p = 54',293 - 0',3286 = 53',9644$, que differe $1'',7$ por defeito do que tinhamos deduzido das Taboas, e empregado no calculo do lugar citado. E he bem notavel a coincidencia deste resultado com o de M. du Séjour (pag. 313), que achou $1'',5$ tambem por defeito pela combinaçaõ das duas distancias observadas em Vienna com a minima distancia observada em Londres, porque limitou a soluçaõ deste Problema á condiçaõ de ser huma das observações a da minima distancia, ainda que feita em outro Lugar.

80. He porém de advertir, que neste calculo para achar os valores de Σ dados pelos elementos hypotheticos, naõ devem desprezar-se os pequenos termos nas expressões de M, e de N, que aqui desprezámos á excepçaõ de ηt^{2}, para fazermos as nossas formulas equivalentes ás do mesmo Autor, e compararmos os nossos resultados com os delle (n. 27.). Alem disso he claro, que os elementos deduzidos por este Problema haõ de participar do erro que houver na ellipticidade da Terra. A que foi adoptada pelo mesmo Autor, e de que aqui nos temos servido pela rasaõ sobredita, parece ser muito grande. Mas naõ ha certeza neste elemento fugitivo, e até póde ser que seja differente em differentes Lugares. Pelo Problema seguinte poderemos adquirir o conhecimento que ainda nos falta a esse respeito.

81. *Sendo observadas quatro distancias apparentes* S, S', S'', S''', *nos tempos* T, T', T'', T''', *achar o da conjunçaõ* T°, *a differença das declinações* Δ, *a das parallaxes* p, *e a ellipticidade da Terra* $(\rho - 1)$.

O meio de resolver este Problema he o mesmo que o do antecedente, introduzindo de mais a variaçaõ de P, que depende da ellipticidade, e que depois de acertado servirá para a determinar. Falta pois ao valor antecedente de dN sen. ϕ o termo $p\,dP$ sen. P sen. H sen. ϕ, e ao de dM cos. ϕ o termo

$$-p\,dP\ (\cos.P\cos.D\cos.\phi + \text{sen.}\,D\ \text{sen.}\,P\cos.H\cos.\phi).$$

E deverá por tanto ajuntar-se ao valor antecedente de $d\Sigma$ o termo

$$-pdP\ (\cos.P\cos.D\cos.\phi + \text{sen.}\,D\,\text{sen.}\,P\cos.H\cos.\phi - \text{sen.}\,P\,\text{sen.}\,H\,\text{sen.}\,\phi).$$

Neste bem se vê, que p se refere á unidade do minuto, e dP á do raio;

mas podemos trocar-lhes as relações, entendendo dP referido á unidade do minuto, e mudando p para sen. p, como aqui faremos.

82. E assim suppondo, para abbreviar,

sen. p cos. P cos. $D = 6'$, sen. p sen. $P = g'$, sen. p sen. D sen. $P = q'$,

calculando para a quarta observaçaõ as quantidades A''', B''', como no Problema antecedente, e fazendo mais

$$\begin{aligned}
C &= 6' \text{ cos. } \phi + q' \text{ cos. } H \text{ cos. } \phi - g' \text{ sen. } H \text{ sen. } \phi \\
C' &= 6' \text{ cos. } \phi' + q' \text{ cos. } H' \text{ cos. } \phi' - g' \text{ sen. } H' \text{ sen. } \phi', \\
C'' &= 6' \text{ cos. } \phi'' + q' \text{ cos. } H'' \text{ cos. } \phi'' - g' \text{ sen. } H'' \text{ sen. } \phi'', \\
C''' &= 6' \text{ cos. } \phi''' + q' \text{ cos. } H''' \text{ cos. } \phi''' - g' \text{ sen. } H''' \text{ sen. } \phi''',
\end{aligned}$$

teremos as quatro equações seguintes

$$\begin{aligned}
d\Delta \text{ cos. } \phi - A\, dT^{\circ} - B\, dp - C\, dP &= d\Sigma, \\
d\Delta \text{ cos. } \phi' - A'\, dT^{\circ} - B'\, dp - C'\, dP &= d\Sigma', \\
d\Delta \text{ cos. } \phi'' - A''\, dT^{\circ} - B''\, dp - C''\, dP &= d\Sigma'', \\
d\Delta \text{ cos. } \phi''' - A'''\, dT^{\circ} - B'''\, dp - C'''\, dP &= d\Sigma'''.
\end{aligned}$$

E para a resoluçaõ dellas tendo calculado as quantidades F, F', G, G', f, f', K, k, como no Problema antecedente, calcularemos mais as seguintes

$$\begin{aligned}
F'' &= A'' \text{ cos. } \phi''' - A''' \text{ cos. } \phi'', & E &= C \text{ cos. } \phi' - C' \text{ cos. } \phi, \\
G'' &= B'' \text{ cos. } \phi''' - B''' \text{ cos. } \phi'', & E' &= C' \text{ cos. } \phi'' - C'' \text{ cos. } \phi', \\
f'' &= d\Sigma'' \text{ cos. } \phi'' - d\Sigma'' \text{ cos. } \phi''', & E'' &= C'' \text{ cos. } \phi''' - C''' \text{ cos. } \phi'', \\
K' &= F' G'' - F'' G', & L &= F E' - F' E, \\
k' &= F' f'' - F'' f', & L' &= F' E'' - F'' E', \\
R &= K L' - K' L, & r &= K k' - K' k :
\end{aligned}$$

Com os quais acharemos finalmente

$$d\dot{P} = \frac{r}{R}, \quad dp = \frac{k - L\, dP}{K}, \quad dT^{\circ} = \frac{f - G dp - E\, dP}{F},$$

$$d\Delta = \frac{d\Sigma + A\, dT^{\circ} + B\, dp + C dP}{\text{cos. } \phi}.$$

83. O processo do calculo he como o do Problema antecedente, e por P convem tomar-se hypotheticamente a altura do pólo, porque entaõ será dP o angulo da vertical, e teremos immediatamente

$$(\rho - 1) = \frac{\text{sen. } dP}{2 \text{ sen. } P \text{ cos. } P} = \frac{\text{sen. } dP}{\text{sen. } 2P} \text{ (n. 3.)},$$

e a differença das parallaxes equatorias $= \frac{p}{1-(\rho-1)\,\text{sen.}^2 P}$ (n. 4.).

Huma vez acertada a ellipticidade por bastantes observações, bastará usar do Problema antecedente para determinar os outros elementos. E porque o erro da parallaxe ha de ser constante, se as equações della dadas pelas Taboas saõ exactas, no caso de assim se achar, e de se ter determinado por muitas observaçoes esse erro, dahi por diante naõ haverá necessidade senaõ do Problema do n. 64.

84. Em quanto ás observações: As do Sol saõ mais plausiveis, mas mais raras, e mais difficeis de se fazerem bem. As das estrellas de primeira e segunda grandeza saõ mais frequentes, e mais susceptiveis de exactidaõ. Tudo está em se aperfeiçoar quanto for possivel o uso dos micrometros, e em se observar bem huma distancia apparente meia hora pouco mais ou menos antes da immersaõ, e outra outro tanto depois da emersaõ, observando-se tambem muitas vezes nos intervallos o diametro apparente da Lua, donde se colligirá o semidiametro horizontal, e a relaçaõ delle com a parallaxe equatoria. E para estas determinações naõ servem, como acima dissemos, os eclipses centrais, ou quasi centrais (n. 70.).

§. V.

Determinaçaõ dos Lugares, dentro dos quais se comprehende a visibilidade dos Eclipses.

85. *Dada a Conjunçaõ da Lua com qualquer astro, saber se ella he ecliptica, e quais saõ as circunstancias gerais do eclipse sobre a Terra.*

Para isso naõ he necessario mais do que calcular Δ, h, δ, p (*y*. 16.); porque, fazendo tg. $\alpha = \frac{\delta}{h}$, será Δ cos. α a minima distancia em que o centro da Lua ha de passar a respeito do centro da projecçaõ. E he claro, que sendo o raio da projecçaõ $= p$, e fazendo a soma dos semidiametros dos astros $= \Sigma$, se for Δ cos. α maior que $p + \Sigma$ naõ póde haver eclipse em ponto nenhum da Terra; se for igual, haverá hum só ponto em que se poderá observar o contacto dos astros; e se for menor, haverá mais Lugares,

em que será visivel o eclipse, e tanto mais quanto ella for menor. Quando for Δ cos. $\alpha + \Sigma$ igual, ou menor que p cahirá todo o eclipse dentro da Terra; mas nunca poderá abranger todo o hemispherio della, porque para isso era necessario que fosse p menor que Σ: donde se segue, que os eclipses das estrellas se extendem a hum espaço menor que os do Sol, porque ellas de si naõ tem diametro sensivel. E em fim, quando Δ cos. α for maior, igual, ou menor que p, o eclipse central cahirá, fóra, em hum só ponto, ou em muitos da Terra.

86. Na Conjunçaõ de 1 de Abril de 1764, achando Δ cos. $\alpha = 39',3$, $\Sigma = 30',6$, $p = 54'$, conheceriamos: que era ecliptica por ser Δ cos. α menor que $p + \Sigma$; que naõ cahia todo o eclipse dentro da Terra, por ser Δ cos. $\alpha + \Sigma$ maior do que p; mas que cahiria dentro a phase central, por ser Δ cos. α menor que p.

87. *Achar o Lugar, que verá primeiro o principio do eclipse ao nascer do Sol, o ultimo que verá o fim no seu occaso, e a duraçaõ do eclipse sobre a Terra.*

Suppostas as definições antecedentes, e fazendo a soma dos semidiametros horizontais $= \Sigma$, $\frac{\delta}{h} =$ tg. α, e $\frac{\Delta \text{ cos. } \alpha}{p + \Sigma} =$ sen. λ, teremos

$$\text{sen. } P = \text{sen. } (\lambda \pm \alpha) \text{ cos. } D, \quad \text{cos. } H = -\text{ tg. } D \text{ tg. } P,$$

e

$$t = \frac{(p + \Sigma) \text{ cos. } P \text{ sen. } H}{h}.$$

Toma-se o sinal — para o primeiro Lugar procurado, e + para o ultimo, ainda que sendo α negativo a differença se torne em soma, e a soma em differença. E o angulo λ, que sendo dado pelo seu seno he indifferente para ser agudo ou obtuso, se fosse tomado obtuso naõ daria outras duas soluções differentes, mas sómente a regra que demos para os sinais deveria ser ao contrario. Com cada hum dos dous valores de P se calcula o seu angulo horario H, e tempo T, pela segunda equaçaõ, e pela terceira o tempo t contado desde a Conjunçaõ, donde será conhecido o tempo della $= T - t$, e por elle a longitude do Lugar. E porque a Conjunçaõ he no mesmo instante physico para todos os Lugares, os dous tempos contados delle para os das duas observações, dará a duraçaõ do eclipse sobre a Terra.

Neste calculo entra-se com a parallaxe media, que pertence ao parallello de 45°, que dará resultados muito sufficientes para o annuncio destes phe-

nomenos. Mas, querendo-se mais exactos, com cada hum dos dous valores achados de P se buscará o p que lhe corresponde, e com elle o seu particular λ, e usando do sinal competente de α se achará o seu valor exactamente.

88. DEM. He facil de ver, que considerando a Lua com hum semidiametro igual á soma dos semidiametros della e do Sol, quando a sua circumferencia assim augmentada tocar na do horizonte da projecçaõ, o Observador que entaõ se achar no ponto do contacto será o primeiro que ha de ver o principio do eclipse na Terra, e que semelhantemente o que estiver no contacto das mesmas circumferencias ao separar dellas, será o ultimo que verá o fim. Suppondo pois neste caso, que a circumferencia do horizonte he circular, o ponto do contacto e o centro da Lua estaraõ no mesmo raio da projecçaõ produzido, e abaixando delles perpendiculares ao meridiano, os triangulos similhantes daraõ

$$p : p + \Sigma :: g \text{ sen. } H : ht,$$

e

$$p : p + \Sigma :: 6 - q \cos. H : \Delta + \delta t.$$

Donde, pela eliminaçaõ de t, e pela substituiçaõ dos valores de g, 6, q, de $\text{tg. } \alpha = \frac{\delta}{h}$, e de $\text{sen. } \lambda = \frac{D \cos. \alpha}{p + \Sigma}$, teremos

$$\text{sen. } P \cos. D \cos. \alpha - \text{sen. } D \cos. P \cos. \alpha \cos. H - \cos. P \text{ sen. } \alpha \text{ sen. } H = \text{sen. } \lambda.$$

E eliminando H pelos valores de

$$\cos. H = -\text{tg. } D \text{ tg. } P, \quad \text{sen. } H = \pm \sqrt{(1 - \text{tg.}^2 D \text{ tg.}^2 P)},$$

e reduzindo, será

$$\frac{\text{sen. } P \cos. \alpha}{\cos. D} - \text{sen. } \lambda = \pm \sqrt{\left(\text{sen.}^2 \alpha - \frac{\text{sen.}^2 \alpha \text{ sen.}^2 P}{\cos.^2 D} \right)}.$$

Mas quadrando esta equaçaõ, e reduzindo, temos

$$\frac{\text{sen.}^2 P}{\cos.^2 D} - 2 \text{ sen. } \lambda \cos. \alpha \cdot \frac{\text{sen. } P}{\cos. D} = \text{sen.}^2 \alpha - \text{sen.}^2 \lambda :$$

Logo

$$\frac{\text{sen. } P}{\cos. D} = \text{sen. } \lambda \cos. \alpha \pm \sqrt{(\text{sen.}^2 \alpha - \text{sen.}^2 \lambda + \text{sen.}^2 \lambda \cos.^2 \alpha)}$$

$$= \text{sen. } \lambda \cos. \alpha \pm \text{sen. } \alpha \cos. \lambda ;$$

e logo

$$\text{sen. } P = \text{sen. } (\lambda \pm \alpha) \cos. D.$$

89. EXEMPLO: No mesmo eclipse, sendo $\Sigma = 30', 610$, $\alpha = 28° 44' 50''$,

Δ cos. $\alpha = 39',328$, e tomando $p = 54'$, achamos $\lambda = 27°\ 41'\ 50''$, e consequintemente $P = -\ 1°\ 2'\ 47''$ para o primeiro Lugar, e $P = 56°\ 8'\ 20''$ para o ultimo. Ao primeiro dos quais toca $p = 54',163$, com o qual se acha o seu respectivo $\lambda = 27°\ 38'\ 30''$, e $P = -\ 1°\ 6'\ 6''$; e ao segundo compete $p = 53',952$, donde se acha $\lambda = 27°\ 42'\ 50''$, e $P = 56°\ 9'\ 24''$; e as Latitudes correspondentes $1°\ 7'\ 2''$ austral, e $56°\ 27'\ 20''$ boreal. M. du Séjour (pag. 163.) achou $1°\ 1'\ 55''$, e $56°\ 17'\ 21''$.

Para o primeiro Lugar achamos tambem $H = -\ 89°\ 54'\ 24''$, $T = 6^h\ 0'\ 22''$ da manhaã, $t = -\ 3^h\ 32'\ 20''$, a σ ás $9^h\ 32'\ 42''$, e o Lugar $1^h\ 37'\ 4''$ para occidente de Paris. Do mesmo modo temos para o segundo $H = 97°\ 14'$, $T = 6^h\ 28'\ 56''$ da tarde, $t = 1^h\ 57'\ 2''$, a σ ás $4^h\ 31'\ 54''$, e a differença de Longitude $5^h\ 22'\ 8''$ para oriente. E pois que começou o eclipse na Terra $3^h\ 32'\ 20''$ antes da σ, e acabou $1^h\ 57'\ 2''$ depois, segue-se que a duraçaõ foi de $5^h\ 29'\ 22''$. M. du Séjour tem $5^h\ 28'\ 21''$; e as differenças de Longitude $1^h\ 37'\ 21''$ para occidente, e $5^h\ 22'\ 33''$ para oriente.

90. *Em qualquer parallello dado achar os Lugares, onde o eclipse ha de começar, e acabar, assim ao nascer, como ao pôr do astro eclipsado.*

Primeiramente buscaremos H pela equaçaõ

$$\text{cos. } H = -\ \text{tg. } D\ \text{tg. } P\ (\text{n. } 8.),$$

e concluiremos o tempo T do Lugar. Depois calculando as quantidades m, n (n. 17.), e suppondo a soma dos semidiametros horizontais $= \Sigma$, tg. $\alpha = \frac{\delta}{h}$, e cos. $\lambda = \frac{n\ \text{sen. } \alpha + (\Delta - m)\ \text{cos. } \alpha}{\Sigma}$, teremos

$$t = \frac{\Sigma\ \text{sen. } (\pm\lambda - \alpha) + n}{h}, \text{ e temp. da } \sigma = T - t.$$

O angulo λ toma-se sempre com o sinal $-$ para o principio do eclipse, e com $+$ para o fim, quer seja no horizonte oriental, quer no occidental; e he agudo ou obtuso, segundo for positivo ou negativo o numerador da expressaõ do seu coseno. Mas tem differente valor para o nascer do astro do que para o pôr; valores, que se acliaõ com os mesmos numeros calculados, mas tomando n negativo no horizonte oriental, e positivo no occidental, e ficando m o mesmo em ambos os casos. Para hum igual parallello austral servirãõ tambem os mesmos numeros calculados, mudando entaõ m de sinal. Assim se determinaráõ oito Lugares na Terra, quando naõ sejaõ impossiveis alguns, por salir o coseno do seu respectivo λ maior

que o raio; e as longitudes delles constaráõ pela comparaçaõ dos tempos respectivos da conjunçaõ com o do meridiano das Taboas, como he sabido.

91. DEM. Como temos $ht - n = N = \Sigma \text{ sen. } \phi$, e $\Delta - m + \delta t = M = \Sigma \text{ cos. } \phi$ (n. 22.), será

$$t = \frac{\Sigma \text{ sen. } \phi + n}{h} = \frac{\Sigma \text{ cos. } \phi - (\Delta - m)}{\delta};$$

donde, suppondo $\text{tg. } \alpha = \frac{\delta}{h}$, se segue

$$(\Sigma \text{ sen. } \phi + n) \text{ tg. } \alpha = \Sigma \text{ cos. } \phi - (\Delta - m),$$

que se reduz a

$$\Sigma \text{ cos. } (\phi + \alpha) = n \text{ sen. } \alpha + (\Delta - m) \text{ cos. } \alpha.$$

Logo, fazendo $\frac{n \text{ sen. } \alpha + (\Delta - m) \text{ cos. } \alpha}{\Sigma} = \text{cos. } \lambda$, teremos

$$\phi = \pm \lambda - \alpha;$$

e conseguintemente

$$t = \frac{\Sigma \text{ sen. } (\pm \lambda - \alpha) + n}{h},$$

donde será conhecido

o tempo da $\odot = T - t$.

92. EXEMPLO: Pergunta-se que Lugares no parallelo boreal de 50° haviaõ de ver o principio e fim do mesmo eclipse no horizonte. Para esse parallelo achamos $P = 49° 40' 56''$, $p = 53',985$, $H = \pm 95° 42' 40''$, $n = \pm 34',756$, $m = 41',308$, $\Delta = 44',857$, $\delta = 13',14$, $h = 23',953$, $\alpha = 28° 44' 50''$, $\Sigma = 30',610$: donde concluimos $\lambda = \pm 116° 23' 20''$ para o horizonte oriental, e $\lambda = \pm 49° 37' 40''$ para o occidental. E no parallelo austral de 50° naõ he possivel o que se busca, porque tanto para oriente, como para occidente, pela mudança de m de positivo para negativo sahe o coseno de λ maior que o raio.

93. No primeiro caso pois, em que he $T = 5^h\ 37'\ 9''$ da manhaã, temos para o principio $t = -2^h,1817$, a $\odot$ ás $7^h\ 48'\ 3''$, e o Lugar $3^h\ 21'\ 43''$ para occidente de Paris; e para o fim $t = +0^h,1745$, a $\odot$ ás $5^h\ 47'\ 37''$, e o Lugar $5^h\ 22'\ 9''$ para occidente. E no segundo, em que $T = 6^h\ 22'\ 51''$ da tarde, se acha para o principio $t = -0^h,19945$, a $\odot$ ás $6^h\ 10'\ 53''$, e o Lugar $7^h\ 1'\ 7''$ para oriente de Paris; e para o fim, $t = +1^h,9064$, a $\odot$ ás $4^h\ 28'\ 28''$, e o Lugar $5^h\ 18'\ 42''$ para oriente.

M. du Séjour (pag. 154.) achou as differenças de Longitude neste ultimo caso $7^h\ 1'\ 15''$, e $5^h\ 18'\ 27''$.

94. He de advertir, que este Problema naõ se limita ao principio e fim dos eclipses, senaõ porque tomamos Σ igual á soma dos semidiametros; nem ao horizonte, senaõ porque tomamos o angulo H qual compete a essa condiçaõ no parallello dado. E por isso geralmente se pode applicar ao caso de qualquer distancia dos centros Σ, e de qualquer angulo horario H no parallello dado. Mas como estes calculos se costumaõ fazer com o fim de construir Cartas Gerais, que representem as circunstancias dos eclipses sobre a Terra, e nellas sómente se lançaõ as linhas que marcaõ o principio e fim ao nascer, e ao pôr do Sol, a estas accommodamos a soluçaõ do Problema. Antes porém de começar esses calculos, convem saber os limites até onde se extende a possibilidade delles, como passamos a mostrar.

95. *Achar os limites dos parallellos, entre os quais he possivel ver-se o eclipse no horizonte.*

Suppostas as definições antecedentes, busque-se o angulo ω pela equaçaõ

$$\text{sen. } \omega = \frac{\Delta \cos. \alpha \pm \Sigma}{p},$$

e os limites procurados seraõ conhecidos pela equaçaõ

$$\text{sen. } P = \text{sen. } (\omega \pm \alpha) \cos. D.$$

Se ambos os valores de $\Delta \cos. \alpha \pm \Sigma$ forem menores que p, terá ω dous valores, e cada hum delles dará dous para P, sendo os que provierem de $\Delta \cos. \alpha + \Sigma$ limites da parte boreal; e os que de $\Delta \cos. \alpha - \Sigma$, limites da parte austral. E se algum dos ditos valores for maior que p, naõ haverá limites para essa parte, por cahir parte do eclipse fóra da Terra. Mas haverá nesse caso hum limite onde o Sol deixa de se occultar debaixo do horizonte, ou de apparecer sobre elle, que he onde H passa do real para o imaginario, ou sendo $P = 90° - D$. E em quanto aos dous sinais de α, o sinal $-$ he para o limite no horizonte oriental, e $+$ no occidental.

96. DEM. He evidente, que os limites procurados saõ onde λ passar do real para o imaginario, isto he, quando for

$$n \text{ sen. } \alpha + (\Delta - m) \cos. \alpha = \pm \Sigma \text{ (n. 90.)}.$$

Mas pela condiçaõ de

$$\cos. H = - \text{tg. } D \text{ tg. } P,$$

e

$$\text{sen.}\, H = \pm \sqrt{(1 - \text{tg.}^2 D\ \text{tg.}^2 P)},$$

temos

$$m = p\ \text{sen.}\, P\ \text{cos.}\, D + \frac{p\ \text{sen.}\, P\ \text{sen.}^2 D}{\text{cos.}\, D} = \frac{p\ \text{sen.}\, P}{\text{cos.}\, D},$$

e

$$n = p\ \text{cos.}\, P\ \text{sen.}\, H = p \sqrt{\left(\text{cos.}^2 P - \frac{\text{sen.}^2 P\ \text{sen.}^2 D}{\text{cos.}^2 D}\right)}$$

$$= p \sqrt{\left(1 - \frac{\text{sen.}^2 P}{\text{cos.}^2 D}\right)}.$$

Logo, substituindo estes valores, e fazendo

$$\frac{\Delta\ \text{cos.}\, \alpha \pm \Sigma}{p} = \text{sen.}\, \omega,$$

teremos

$$\frac{\text{sen.}\, P\ \text{cos.}\, \alpha}{\text{cos.}\, D} \pm \text{sen.}\, \alpha \sqrt{\left(1 - \frac{\text{sen.}^2 P}{\text{cos.}^2 P}\right)} = \text{sen.}\, \omega.$$

E suppondo $\frac{\text{sen.}\, P}{\text{cos.}\, D} = \text{sen.}\, \psi$, será

$$\text{sen.}\, \psi\ \text{cos.}\, \alpha \pm \text{sen.}\, \alpha\ \text{cos.}\, \psi = \text{sen.}\, \omega,\ \psi \pm \alpha = \omega,$$

e conseguintemente

$$\text{sen.}\, P = \text{sen.}\, (\omega \pm \alpha)\ \text{cos.}\, D.$$

97. EXEMPLO: No mesmo eclipse temos $\alpha = 28^\circ\ 44'\ 50''$, $\Delta\ \text{cos.}\, \alpha = 39',328$, $\Sigma = 30',610$, e tomando $p = 54'$, que he o seu valor medio neste eclipse, veremos primeiramente que $\Delta\ \text{cos.}\, \alpha + \Sigma$ he aqui maior que p; e por conseguinte, que naõ ha limites da parte boreal, senaõ o de $P = 90^\circ - D = 85^\circ\ 10'\ 29''$. E depois com o valor de $\Delta\ \text{cos.}\, \alpha - \Sigma = 8',718$ menor que o de p, acharemos $\omega = 9^\circ\ 17'\ 20''$, donde vem $P = -19^\circ\ 22'\ 50''$ para o limite oriental, e $P = 37^\circ\ 52'\ 50''$ para o occidental, os quais saõ approximados quanto he bastante. Mas querendo-os exactos, buscaremos as suas parallaxes respectivas $54',129$, e $54',048$, com a primeira das quais acharemos $\omega = 9^\circ\ 17'\ 7''$, e $P = -19^\circ\ 24'\ 24''$; e com a segunda $\omega = 9^\circ\ 16'\ 57''$, e $P = 37^\circ\ 52'\ 15''$. Donde, reduzindo ás Latitudes verdadeiras, teremos por limites o parallello austral de $19^\circ\ 36'\ 37''$, e o boreal de $38^\circ\ 11'\ 1''$. M. du Séjour (pag. 159.) achou $19^\circ\ 36'\ 12''$, e $38^\circ\ 10'\ 50''$.

98. Deveriamos pois começar neste eclipse os calculos do Problema an-

tecedente do parallello austral de 19° 37′ para o norte para determinar as Longitudes dos Lugares que haveriaõ de ter o principio e fim ao nascer do Sol; e do parallello boreal de 38° 11′ levariamos juntamente os respectivos ao pôr do Sol, naõ esquecendo a advertencia de levar tambem juntamente o calculo dos parallellos austrais com o dos seus iguais da banda do norte (n. 90.). E assim procederiamos até chegar ao parallello boreal de 85° 10′ 29″, onde acaba a possibilidade do nascimento e occaso do Sol no dia do mesmo eclipse. Mas antes de chegar a elle, e na sua vizinhança ha hum muito notavel, que determinaremos pelo Problema seguinte:

99. *Achar o Lugar particular, onde o eclipse ha de começar, e acabar no horizonte, sendo a duraçaõ delle por todo o dia, ou por toda a noite.*

Seja t o tempo do principio, ou do fim do eclipse, contado da passagem do astro pelo meridiano, p a parallaxe que convem á Latitude igual ao complemento da declinaçaõ, pouco differente da do Lugar que se procura, Σ a soma dos semidiametros horizontais: E fazendo $h' = h \pm \gamma' p \text{ sen. } D$, $\text{tg. } \alpha' = \frac{\delta}{h'}$, e $\text{cos. } \phi = \frac{(\Delta - p) \text{ cos. } \alpha'}{\Sigma}$, teremos

$$t = \pm \frac{\Sigma \text{ sen. } \phi \text{ cos. } \alpha'}{h'}, \quad \text{tg. } P = \text{cot. } D \text{ cos. } \gamma t,$$

$$\text{e a } \odot \text{ ao } \left\{ \begin{matrix} \text{meio-dia} \\ \text{ou} \\ \text{meia-noite} \end{matrix} \right. + \frac{(\Delta - p) \text{ sen. } \alpha' \text{ cos. } \alpha'}{h'} \Bigg\}.$$

Na expressaõ de h' toma-se o sinal + quando D e p saõ da mesma denominaçaõ, e — quando saõ de denominaçaõ contraria: bem entendido, que aqui deve p tomar-se sempre com a denominaçaõ de Δ. E no primeiro caso toma-se tambem a meia-noite na expressaõ do tempo da conjunçaõ, e no segundo o meio-dia.

100. DEM. He evidente, que este singular phenomeno naõ pode ter lugar, senaõ no caso de ser Δ algum tanto consideravel, e que tomando-se p na mesma direcçaõ de Δ deve entender-se que participa do mesmo sinal, e muito mais reflectindo-se que entra em vez de outra linha, que sempre cahe para o norte, ou para o sul, como logo veremos. E por outra parte tambem he claro, que quando tiver lugar, ha de ser no tempo nocturno, ou diurno, segundo forem D e Δ da mesma, ou de differente denominaçaõ, pois que devem ser pequenos os ditos tempos para se ajustarem com a duraçaõ do eclipse. E porque, pela condiçaõ da Questaõ he

o meio do eclipse no instante da passagem do Sol pelo meridiano, e a maxima phase coincide proximamente com o dito meio, e muito mais nas circunstancias do Problema, segue-se que no Lugar procurado ha de ser a minima distancia dos centros ao meio-dia, ou á meia-noite; e assim se reduz a Questaõ a poder resolver-se pelo meio de que já nos servimos nos Problemas dos num. 36. e 44.

101. Supponhamos pois (*Fig.* 3.) que o meridiano CK coincide com RL, e que quando nelle se acha o astro em S está a Lua em p, isto he, na perpendicular á orbita apparente PL, traçada na supposiçaõ de estar o astro fixo em S por todo o tempo do eclipse. E porque ha de ser a ☌ quando a ☾ chegar a L, pL em tempo dará a distancia della ao meio-dia, ou á meia-noite: e do mesmo modo, sendo $SP = \Sigma$, PL em tempo dará a semiduraçaõ do eclipse; e conseguintemente o principio, e fim delle, com o ângulo horario, de que se concluirá a Latitude do Lugar.

102. E assim, como temos

$$RL = \Delta,\ RS = p \text{ sen. } P \text{ cos. } D - p \text{ sen. } D \text{ cos. } P \text{ cos. } H,$$

e he no caso do Problema cos. $H = \pm 1$, dos quais valores deve tomar-se $+$ quando P e D saõ de differente denominaçaõ, e $-$ quando da mesma, será sempre

$$RS = p \text{ sen. } (P + D).$$

E porque P he poucos minutos menor que $90^\circ - D$, e por tanto $P + D$ outros tantos menor que 90°, e conseguintemente o seu seno sensivelmente igual ao raio, teremos $RS = p$, e $SL = \Delta - p$. Do mesmo modo nas quantidades $\delta' = \delta - \gamma' q$ sen. H', $h' = h - \gamma' g$ cos. H' (n. 38.), como temos sen. $H' = 0$, cos. $H' = \pm 1$, e $g = p$ cos. $P = p$ sen. D proximamente, será $\delta' = \delta$, e $h' = h \pm \gamma' p$ sen. D. Pelo que fazendo tg. $\alpha' = \frac{\delta}{h'}$, e cos. $\phi = \frac{(\Delta - p) \text{ cos. } \alpha}{\Sigma}$, he facil de concluir que teremos

$$\text{o tempo da } ☌ = \left\{ \begin{matrix} 0^h \\ 12 \end{matrix} \right\} + \frac{(\Delta - p) \text{ sen. } \alpha' \text{ cos. } \alpha'}{h'},$$

$$t = \pm \frac{\Sigma \text{ sen. } \phi \text{ cos. } \alpha'}{h'},$$

e

$$\text{tg. } P = \text{cot. } D \text{ cos. } \gamma t.$$

103. EXEMPLO: No caso do mesmo eclipse, em que deve ser o prin-

cipio ao pôr, e o fim ao nascer do ☉, temos $p = 53', 858$, $\Delta - p = -9', 001$, $\Sigma = 30', 610$, $\delta = 13', 14$, $\gamma' p$ sen. $D = 1', 186$, $h' = 25', 139$, $\alpha' = 27^{\circ}\ 35'\ 45''$, $\phi = \pm 164^{\circ}\ 53'\ 40''$. Donde concluimos $t = \pm 1^{h}\ 2'\ 30''$, $\gamma t = \pm 15^{\circ}\ 37'\ 40''$, $P = 84^{\circ}\ 59'\ 30''$, a Latitude do Lugar $= 85^{\circ}\ 2'\ 52''$, o principio do eclipse ás $10^{h}\ 57'\ 30''$ da tarde, o fim á $1^{h}\ 2'\ 30''$ da manhaã, e a ☾ ás $11^{h}\ 51'\ 11''$ da tarde, que dá a Longitude do Lugar de $11^{h}\ 18'\ 35''$ para occidente de Paris.

M. du Séjour (pag. 173.) depois de huma longa discussaõ, naõ achando meio de resolver por formulas directas esta Questaõ, e passando mesmo a decidir que naõ podia haver nenhum, remette-se ao methodo indirecto das falsas posições, e conclue com o resultado das que fez a respeito deste eclipse particular: Que o phenomeno deveria ter lugar no parallello boreal de $85^{\circ}\ 3'\ 28''$ por $11^{h}\ 19'\ 20''$ para occidente de Paris, sendo o principio do eclipse ás $10^{h}\ 57'\ 24''$ da tarde, e o fim á $1^{h}\ 2'\ 36''$ da manhaã.

§. VI.

Dos Lugares, que haõ de ter o Eclipse Central.

104. *Achar o Lugar, em que ha de ser o eclipse central na passagem do Sol pelo meridiano.*

A Longitude delle será immediatamente conhecida, porque nesse caso será a conjunçaõ no mesmo instante da passagem do Sol pelo meridiano a 0^{h}, ou 12^{h}, que comparado com o tempo da mesma conjunçaõ no meridiano das Taboas dará a differença das suas Longitudes. E em quanto á Latitude:

Fazendo sen. $\lambda = \frac{\Delta}{p}$, será $P = \lambda + D$.

O angulo λ toma-se sempre agudo, e com a denominaçaõ de Δ. Sendo Δ maior que p, será imaginario, e mostrará que naõ he possivel essa phase no meridiano, ainda que o seja algum tempo antes, ou depois, se Δ cos. α naõ for maior que p; porque sendo-o, cahirá o eclipse central todo fóra da Terra. E quando λ e D, sendo da mesma denominaçaõ, derem a soma maior que 90°, entaõ deve tomar-se a differença, sendo $P = \lambda - D$, e o tempo naõ já 0^{h}, mas 12^{h} da tarde.

105. DEM. As duas equações

$$h\,t - n = \Sigma \text{ sen. } \phi, \quad \Delta + \delta\,t - m = \Sigma \cos. \phi \quad \text{(n. 22.)}$$

pela supposiçaõ da phase central, isto he, pela de $\Sigma = 0$, se tornaõ em $ht = n$, e $\Delta + \delta t = m$; e pela condiçaõ de estar o Sol no meridiano he $n = 0$, $t = 0$, e conseguintemente

$$\Delta = m = p\ (\text{sen. } P \text{ cos. } D - \text{sen. } D \text{ cos. } P \text{ cos. } H),$$

donde se segue que sendo nesse caso cos. $H = 1$, será

$$\Delta = p \text{ sen. } (P - D),$$

e que fazendo $\frac{\Delta}{p} = \text{sen. } \lambda$ teremos

$$P = \lambda + D.$$

Quando porém for a passagem do Sol pelo meridiano entre o pólo e horizonte, e cos. $H = -1$, teremos

$$P = \lambda - D.$$

Este caso se conhecerá facilmente: porque succederá quando λ e D, sendo da mesma denominaçaõ, derem $\lambda + D > 90°$, ou $\lambda > 90° - D$, e conseguintemente sen. $\lambda >$ cos. D, e $\Delta > p$ cos. D. Mas p cos. D marca o lugar do pólo no plano da projecçaõ: logo Δ marcará o ponto da orbita que cortará o meridiano para lá do mesmo pólo, e o tempo em vez de 0^h, será 12^h da tarde. E no caso singular de $\lambda + D = 90°$, a orbita passaria pelo mesmo pólo, e nelle cortaria todos os meridianos, sendo entaõ o tempo indeterminado, e do mesmo modo a Longitude do Lugar, como pela condiçaõ daquelles dous pontos do Globo consta que deve ser. Na vizinhança porém delles, qualquer leve defeito nas quantidades dadas produzirá hum muito grande na differença das Longitudes; mas sem consequencia alguma, porque corresponderá a hum espaço muito pequeno sobre a Terra.

106. EXEMPLO: No mesmo eclipse, sendo $\Delta = 44',857$, e tomando $p = 54',01$, achamos $\lambda = 56° 9'$, e $P = 60° 59'$ proximamente. E porque com este valor de P achamos que lhe corresponde $p = 53',929$, repetindo o calculo teremos $\lambda = 56° 16' 55''$, $P = 61° 6' 26''$, e a Latitude do Lugar $61° 22' 38''$: no qual, sendo a conjunçaõ ao meio-dia, e em Paris ás $11^h 9' 46''$ da manhaã, será a differença de Longitude $0^h 50' 14''$ para oriente. M. du Séjour (pag. 88.) dá $61° 31' 26''$, e $0^h 49' 52''$.

107. *Achar os dous Lugares, que haõ de ter o eclipse central no horizonte, e a duraçaõ delle sobre a Terra.*

Este Problema he hum caso particular, a que se reduz o do n. 87, pela

supposiçaõ de $\Sigma = 0$. E assim fazendo sen. $\lambda = \frac{\Delta \cos. \alpha}{p}$, teremos

sen. $P =$ sen. $(\lambda \pm \alpha)$ cos. D, cos. $H = -$ tg. D tg. P, $t = \frac{p \cos. P \text{ sen. } H}{h}$;

formulas, de que usaremos da mesma maneira, que fica declarada no dito n. 87.

108. EXEMPLO: No mesmo eclipse, sendo $\alpha = 28° 44' 50''$, $\Delta \cos. \alpha = 39',328$, e tomando $p = 54',01$, acharemos $\lambda = 46° 44'$, que nos dará $P = 17° 55'$ ao nascer do Sol, e $P = 74° 43'$ para o seu occaso; lugares, a que correspondem os valores de $p = 54',134$, e $p = 53',878$ respectivamente. E repetindo o calculo para cada hum delles em particular teremos para o primeiro $\lambda = 46° 35' 35''$, $P = 17° 46' 30''$, a Latitude $= 17° 58' 52''$, $H = -91° 33' 5''$, $T = 5^h 53' 48''$ da manhaã, $t = -2^h 9' 5''$, a conjunçaõ ás $8^h 2' 53''$ da manhaã, e a differença de Longitude $3^h 6' 53''$ para occidente de Paris; e para o segundo $\lambda = 46° 53'$, $P = 74° 51' 30''$, a Latitude $= 75° 0' 52''$, $H = 108° 10' 40''$, $T = 7^h 12' 43''$ da tarde, $t = 0^h 33' 30''$, a conjunçaõ ás $6^h 39' 13''$, e a differença de Longitude $7^h 29' 27''$ para oriente de Paris. M. du Séjour (pag. 88.) assigna os parallellos de $18° 5' 24''$, e $75° 7' 22''$, com as differenças de Longitude $3^h 7' 26''$, e $7^h 29' 40''$.

E porque achamos, que começou o eclipse central sobre a Terra $2^h 9' 5''$ antes da conjunçaõ, e acabou $0^h 33' 30''$ depois, foi a duraçaõ delle de $2^h 42' 35''$.

109. *Achar o Lugar, que ha de ter o eclipse central a huma hora dada.*

Com a hora T teremos o angulo horario H, e fazendo

$$\frac{\text{sen. } D \cos. H + \text{sen. } H \text{ tg. } \alpha}{\cos. D} = \text{tg. } \psi, \text{ e } \frac{\Delta \cos. \psi}{p \cos. D} = \text{sen. } \lambda,$$

teremos

$$P = \lambda + \psi, \; t = \frac{p \cos. P \text{ sen. } H}{h}, \text{ e temp. da } \mathcal{C} = T - t.$$

O angulo ψ he sempre agudo, e entende-se ser de denominaçaõ boreal ou austral, segundo for positivo ou negativo o numerador da expressaõ da sua tangente; e o angulo λ toma-se sempre menor que 90°, e segue a denominaçaõ de Δ. Para o tempo $T \pm 12^h$, teremos o mesmo angulo λ, e ψ

tambem o mesmo, sómente com a denominaçaõ contraria, que dará outra soluçaõ $P = \lambda - \psi$, com tanto que nesse tempo naõ esteja o Sol debaixo do horizonte. Mas se no caso de serem λ e ψ da mesma denominaçaõ, a sua soma for maior que 90°, passará a orbita para lá do pólo, e naõ será possivel o phenomeno na hora dada, mas mudando-se a denominaçaõ de ψ, terá lugar na hora $T \pm 12^h$, em quanto $\frac{\Delta \cos. \psi}{p \cos. D}$ naõ for maior que o raio.

110. DEM. As duas equações $h\,t = n$, $\Delta + \delta\,t = m$ (n. 105.) daõ

$$t = \frac{n}{h} = \frac{m - \Delta}{\delta};$$

donde, fazendo sempre $\text{tg.}\,\alpha = \frac{\delta}{h}$, se segue

$$m - n\,\text{tg.}\,\alpha = \Delta.$$

E substituindo os valores de n, e m, que involvem a incognita P, teremos

$$p\,\text{sen.}\,P\cos.\,D - p\,\text{sen.}\,D\cos.\,P\cos.\,H - p\cos.P\,\text{sen.}\,H\,\text{tg.}\,\alpha = \Delta,$$

e conseguintemente

$$\text{sen.}\,P - \frac{\text{sen.}\,D\cos.H + \text{sen.}\,H\,\text{tg.}\,\alpha}{\cos.D}\,.\cos.P = \frac{\Delta}{p\cos.D}.$$

Logo, fazendo

$$\frac{\text{sen.}\,D\cos.H + \text{sen.}\,H\,\text{tg.}\,\alpha}{\cos.D} = \text{tg.}\,\psi, \text{ e } \frac{\Delta\cos.\psi}{p\cos.D} = \text{sen.}\,\lambda, \text{ será}$$

$$\text{sen.}\,(P - \psi) = \text{sen.}\,\lambda,$$

e

$$P = \lambda + \psi.$$

E he claro, que para hum tempo $= T \pm 12^h$, ou hum angulo horario $= H \pm 180°$, sen. H, e cos. H teraõ os mesmos valores numericos mas com os sinais contrarios, e que por tanto ψ terá tambem o mesmo valor com o sinal contrario, ficando λ sem mudança nem do valor nem do sinal, porque sendo ψ sempre agudo, a mudança de sinal delle naõ a faz no seu coseno, que entra na expressaõ de sen. λ. Donde se vê, que com os mesmos numeros teremos outra soluçaõ para a hora $T \pm 12^h$, com tanto que do valor achado de P se naõ siga estar o Sol nesse tempo debaixo do horizonte.

111. He tambem facil de ver, que no caso de passar a orbita pelo pólo,

onde as ellipses dos parallellos no plano da projecçaõ acabaõ em hum ponto, sendo entaõ $\Delta = p \cos. D$, teremos $\text{sen.}\,\lambda = \cos.\psi$, e conseguintemente $\lambda = 90° - \psi$, e $P = \lambda + \psi = 90°$, donde se segue $t = 0$, e H em vez do valor dado pode ter qualquer outro, que sempre dará o mesmo resultado de $P = 90°$. Sendo por tanto $\lambda > 90° - \psi$, e conseguintemente $\lambda + \psi > 90°$, a orbita passará para lá do pólo, e naõ será possivel o phenomeno na hora dada T, mas o será no tempo $T \pm 12^h$, mudando-se entaõ o sinal de ψ para o contrario; e isso em quanto λ naõ se fizer imaginario.

112. EXEMPLO: Supponhamos, que no mesmo eclipse se quer saber o Lugar, que o ha de ter central ás 7^h da manhaã. Será logo $H = -75°$, e acharemos $\psi = -27° 1' 0''$, que dahi a 12^h, ou ás 7^h da tarde será $+ 27° 1' 0''$. E tomando $p = 54',01$, teremos proximamente $\lambda = 47° 57'$, e por conseguinte $P = 20° 56'$ no primeiro caso, e $P = 74° 58'$ no segundo. A estes valores de P correspondem os de $p = 54',127$, e $p = 53',877$; com os quaes, repetindo o calculo, teremos para as 7^h da manhaã $\lambda = 47° 48' 37''$, $P = 20° 47' 37''$, a Latitude do Lugar $= 21° 0' 23''$, $t = -2^h 2' 26''$, a ☉ ás $9^h 2' 26''$ da manhaã, e a differença de Longitude $2^h 7' 20''$ para occidente de Paris. E do mesmo modo para as 7^h da tarde teremos $\lambda = 48° 6' 16''$, $P = 75° 7' 16''$, a Latitude do Lugar $= 75° 16' 52''$, $t = 0^h 33' 28''$, a ☉ ás $6^h 26' 32''$, e a differença de Longitude $7^h 16' 46''$ para oriente de Paris.

M. du Séjour (pag. 84.) achou as Latitudes $21° 7' 58''$, e $75° 23' 31''$, com as differenças de Longitude $2^h 7' 51''$, e $7^h 18' 3''$.

113. *Achar a hora, e a Longitude do Lugar, que ha de ter o eclipse central em hum parallello dado.*

Suppostas as definições antecedentes, e fazendo

$$\text{tg.}\,\psi = \frac{\text{sen.}\,D}{\text{tg.}\,\alpha}, \quad \text{sen.}\,\lambda = \frac{(6 - \Delta)\,\text{sen.}\,\psi}{q} = \frac{(6 - \Delta)\cos.\psi}{g\,\text{tg.}\,\alpha},$$

teremos

$$H = \lambda - \psi,$$

e

$$t = \frac{g\,\text{sen.}\,H}{h}.$$

O angulo ψ toma o sinal de D, e he agudo ou obtuso, segundo for α positivo, ou negativo. E λ quer venha positivo, quer negativo, he indiffe-

rente para ser agudo, ou obtuso, e dará duas soluções differentes, com tanto que huma dellas naõ seja excluida por dar hum valor de H que naõ tenha lugar senaõ debaixo do horizonte. Com H se acha T, e o tempo da $\delta = T - t$, donde se concluirá a Longitude do Lugar.

114. DEM. Na mesma equaçaõ do Problema antecedente

$$m - n \text{ tg. } \alpha = \Delta \text{ (n. 110.)}$$

substituindo os valores de $n = g \text{ sen. } H$, $m = 6 - q \text{ cos. } H$ (n. 30.), teremos

$$g \text{ tg. } \alpha \text{ sen. } H + q \text{ cos. } H = 6 - \Delta.$$

E fazendo

$$\text{tg. } \psi = \frac{q}{g \text{ tg. } \alpha} = \frac{\text{sen. } D}{\text{tg. } \alpha},$$

e

$$\text{sen. } \lambda = \frac{(6 - \Delta) \text{ sen. } \psi}{q} = \frac{(6 - \Delta) \text{ cos. } \psi}{g \text{ tg. } \alpha},$$

acharemos

$$\text{sen. } (H + \psi) = \text{sen. } \lambda,$$

e conseguintemente

$$H = \lambda - \psi,$$

e

$$t = \frac{g \text{ sen. } H}{h}.$$

115. EXEMPLO: Pergunta-se em que Lugar, e a que hora havia de ser central o mesmo eclipse no parallello boreal de 48° 51'. Teremos nesse caso $P = 48° 31' 50''$, $p = 53',990$, $\Delta = 44',857$, $6 = 40',312$, $\log. g = 1.553316$, $\log. q = 0.478207$, e acharemos $\psi = 8° 43' 6''$, $\lambda = -13° 14' 30''$, $H = -21° 57' 36''$, $T = -1^h 27' 50'' = 10^h 32' 10''$ da manhaã, $t = -0^h 33' 29''$, δ ás $11^h 5' 39''$, e a differença de Longitude $0^h 4' 7''$ para occidente de Paris. O outro valor de $H = -175° 28' 36''$ pertence a hum Lugar do mesmo parallello debaixo do horizonte, donde se veria o mesmo phenomeno, se a Terra fosse transparente.

116. M. du Séjour (pag. 83.) dá a hora do phenomeno ás $10^h 31' 16''$, e a differença de Longitude $4' 49''$ para occidente de Paris. Mas houve equivocaçaõ no calculo do logarithmo de $\frac{\cos. \theta \text{ sen. } \lambda \text{ cos. } \xi}{\rho \text{ sen. } \phi \text{ sen. } (\pi - p)}$ (pag. 81.), que naõ he 0.1747834, mas 0.1740407, com o qual acharia o tempo do Lugar $10^h 32' 11''$, e a differença de Longitude $0^h 4' 6''$.

E pelo que respeita ao Problema antecedente: houve tambem engano no calculo dos logarithmos (que por equivocaçaõ, assim como o do sobredito, se dizem complementos de Logarithmos) de $\frac{\rho \text{ tg. } \phi}{\cos. \delta \cos. \xi}$, e $\frac{\cos. \theta \text{ sen. } \lambda}{\cos. \phi \cos. \delta \text{ sen. } (\pi - p)}$, o primeiro dos quais naõ he 9.7481183, mas 9.7481283; nem o segundo 9.9229007, mas 9.9221690: com os quais acharia as Latitudes 21° 1' 28", e 75° 17' 5" etc. E isto damos aqui por unico exemplo; porque nos mais casos em que achámos, ou acharmos differenças maiores do que era de esperar, naõ entraremos no trabalho inutil de averiguar de qual das partes houve descuido no calculo.

117. *Achar os limites dos parallellos, entre os quais se comprehende a linha da centralidade sobre a Terra.*

Tendo feito $\text{tg. } \psi = \frac{\text{sen. } D}{\text{tg. } \alpha}$, como no Problema antecedente, faça-se mais

$$\text{tg. } \chi = \frac{\text{tg. } D}{\text{sen. } \psi} = \frac{\text{tg. } \alpha}{\cos. D \cos. \psi}, \quad \text{sen. } \lambda = \frac{\Delta \cos. \chi}{p \cos. D};$$

e teremos

$$P = \lambda \pm \chi.$$

Os angulos ψ e χ saõ determinados de sinal e de especie pela regra já dita muitas vezes; e o angulo λ segue a denominaçaõ de Δ.

118. DEM. He evidente, que os limites procurados saõ onde o angulo λ do Problema antecedente passa do real para o imaginario, isto he, onde $(6 - \Delta) \text{ sen. } \psi = \pm q$. Substituindo pois nesta equaçaõ os valores de $6 = p \text{ sen. } P \cos. D$, e $q = p \text{ sen. } D \cos. P$, teremos

$$\text{sen. } P \text{ sen. } \psi \mp \text{tg. } D \cos. P = \frac{\Delta \text{ sen. } \psi}{p \cos. D},$$

que pela substituiçaõ de $\text{tg. } \chi = \frac{\text{tg. } D}{\text{sen. } \psi}$ dará

$$\text{sen. } P \cos. \chi \mp \text{sen. } \chi \cos. P = \frac{\Delta \cos. \chi}{p \cos. D}.$$

Donde, fazendo $\frac{\Delta \cos. \chi}{p \cos. D} = \text{sen. } \lambda$, concluiremos

$$P = \lambda \mp \chi.$$

Quando for $\alpha = 0$, e conseguintemente $\psi = 90°$, será $\chi = D$, e sen. $\lambda = \frac{\Delta}{p}$. E porque a expressaõ $\frac{\text{tg. } D}{\text{sen. } \psi}$, pela substituiçaõ de sen. $\psi = \frac{\text{sen. } D \text{ cos. } \psi}{\text{tg. } \alpha}$, nos dá tambem

$$\text{tg. } \chi = \frac{\text{tg. } \alpha}{\text{cos. } D \text{ cos. } \psi},$$

segue-se que sendo $D = 0$, e conseguintemente tambem $\psi = 0$, teremos $\chi = \alpha$, e sen. $\lambda = \frac{\Delta \text{ cos. } \alpha}{p}$. E se ao mesmo tempo for $D = 0$, e $\alpha = 0$, segue-se tambem que será $\chi = 0$, e que os dous limites concorreráõ em hum só parallello determinado pela equaçaõ sen. $P = \frac{\Delta}{p}$.

119. EXEMPLO: No caso do mesmo eclipse teremos pois $\psi = 8° 43' 6''$, e $\chi = 29° 6' 55''$. Donde, tomando $p = 64', 01$, acharemos $\lambda = 46° 44'$, que dará $P = 17° 37'$, e $P = 75° 51'$ proximamente. A estes valores de P correspondem os de $p = 54', 135$, e $p = 53', 876$. E repetindo com elles o calculo acharemos para o primeiro limite $\lambda = 46° 35' 34''$, $P = 17° 28' 39''$, e a Latitude $= 17° 39' 43''$; e para o segundo, $\lambda = 46° 53' 5''$, $P = 76° 0' 0''$, e a Latitude $= 76° 9' 4''$. M. du Séjour (pag. 85.) dá $17° 47' 10''$, e $76° 15' 26''$.

Começariamos por tanto os calculos do Problema antecedente do parallello boreal de $17° 40'$ até o de $76° 9'$, e acharíamos as Longitudes dos pontos delles por onde havia de passar a linha central, e as horas que em cada hum se haviaõ de contar no instante do phenomeno. Mas segundo a fórma, que costuma dar-se ás Cartas dos eclipses, em que se naõ ordenaõ os ditos pontos a respeito das Latitudes, mas das horas que nelles se contaõ, para esse calculo nos serviremos do outro Problema do n. 109.

§. VII.

Maximas Phases.

120. *Dada a minima distancia dos centros, achar a maxima phase, ou reciprocamente.*

Seja o semidiametro horizontal da Lua $= \sigma$, o do Sol reduzido $= s'$, a distancia minima dos centros no plano da projecçaõ $= \Sigma'$, e a maxima phase em digitos $= d$. Pelo que já mostrámos (n. 42.), teremos

$$d = \frac{6(\sigma + s' - \Sigma')}{s'},$$

e conseguintemente

$$\Sigma' = \sigma + s'\left(1 - \frac{d}{6}\right).$$

121. Na primeira equaçaõ toma-se sempre a differença entre a soma dos semidiametros e a minima distancia, sem attender ao sinal proprio desta, os digitos porém seraõ boreais ou austrais, segundo ella for positiva ou negativa. E na segunda toma-se d como positivo, mas o valor achado de Σ' será positivo para os digitos boreais, negativo para os austrais. Assim, se fizermos $d = 12$, teremos para o contacto dos limbos austrais $\Sigma' = \sigma - s'$, e para o dos boreais $\Sigma' = -\sigma + s'$; valores, que serviráõ para determinar os Lugares por onde ha de passar a zona do eclipse total no caso de $\sigma > s'$, ou do annular no de $\sigma < s'$. Como porém s' varía de grandeza segundo a altura do Sol sobre o horizonte, pode succeder que o mesmo eclipse comece e acabe annular sobre a Terra, e seja total por algum espaço intermedio da sua passagem.

122. *Em hum parallello dado achar o Lugar, que ha de ter a maxima phase a huma hora dada, e a grandeza della.*

Suppostas as definições antecedentes (n. 17. 3o.), e a da minima distancia dos centros no plano da projecçaõ $= \Sigma'$, calculem-se as quantidades

$$n = g \text{ sen. } H,\ m = 6 - q \cos. H,\ \text{tg. } \mu = \frac{n}{m},$$

$$\text{sen. } \pi = \frac{m}{p \cos. \mu},\ \text{tg. } \alpha = \frac{\delta}{h},\ \text{tg. } \alpha' = \frac{\delta - \gamma' q \text{ sen. } H}{h - \gamma' g \cos. H},$$

e teremos

$$\Sigma' = \frac{\Delta \cos. \alpha - p \text{ sen. } \pi \cos. (\mu + \alpha)}{\cos. (\alpha' - \alpha)},\ t = \frac{n - \Sigma' \text{ sen. } \alpha}{h}.$$

Donde, pelo Problema antecedente, concluiremos a grandeza da phase; e a Longitude do Lugar, pelo tempo da $\odot = T - t$.

123. DEM. He evidente, que a minima distancia dos centros succede no instante, em que a linha delles he perpendicular á direcçaõ actual da orbita apparente da Lua. E por tanto, suppondo o astro em S, e a Lua em

L (*Fig.* 4.), será SL a minima distancia dos centros, se for perpendicular á direcçaõ da orbita apparente Lh, por onde pareceria mover-se a Lua a respeito do astro, que ficasse fixo em S. Mas fazendo $hLm = \alpha'$, temos visto que he

$$\text{tg. } \alpha' = \frac{\delta - \gamma' q \text{ sen. } H}{h - \gamma' g \cos. H} \text{ (n. 38.)};$$

logo, suppondo $SL = \Sigma'$, e reflectindo que $LSm = hLm = \alpha'$, teremos $Lm = \Sigma' \text{ sen. } \alpha'$, e $Sm = ge = \Sigma' \cos. \alpha'$. Por outra parte temos $Le = ht$, e $me = n$ (n. 21. 23.): Logo

$$ht = n - \Sigma' \text{ sen. } \alpha'.$$

E porque $CK = \Delta$, $Ke = \delta t$, e $Cg = RS = m$, teremos tambem

$$\delta t = \Sigma' \cos. \alpha' + m - \Delta.$$

124. Teremos pois

$$t = \frac{n - \Sigma' \text{ sen. } \alpha'}{h} = \frac{\Sigma' \cos. \alpha' + m - \Delta}{\delta};$$

donde, pela substituiçaõ de $\text{tg. } \alpha = \frac{\delta}{h}$, se segue

$$n \text{ tg. } \alpha - \Sigma' \text{ tg. } \alpha \text{ sen. } \alpha' = \Sigma' \cos. \alpha' + m - \Delta,$$

que se reduz a

$$\Sigma' \cos. (\alpha' - \alpha) = \Delta \cos. \alpha - m \left(\cos. \alpha - \frac{n}{m} \text{ sen. } \alpha \right).$$

Mas, fazendo $\text{tg. } \mu = \frac{n}{m}$, e $\text{sen. } \pi = \frac{m}{p \cos. \mu}$, temos

$$m \left(\cos. \alpha - \frac{n}{m} \text{ sen. } \alpha \right) = p \text{ sen. } \pi \cos. (\alpha + \mu):$$

Logo

$$\Sigma' = \frac{\Delta \cos. \alpha - p \text{ sen. } \pi \cos. (\alpha + \mu)}{\cos. (\alpha' - \alpha)}.$$

Donde se conclue

a distancia minima apparente $= \Sigma' + \Sigma' \text{ sen. } p \cos. \pi$.

125. EXEMPLO: Querendo saber em que Lugar no parallello boreal de 48° 51′ havia de ser a maxima phase ás 7^h da manhaã, e a grandeza della: teremos $P = 48° 31' 50''$, $p = 53',990$, $H = -75°$, $\log. g = 1.553316$, $\log. q = 0.478207$, $\log. \gamma' = 9.417969$, $\log. n = -1.538259$, $\log. m = 1.596971$, $\mu = -41° 8' 20''$, $\pi = 76° 28' 50''$, $\alpha' = 32° 50' 50''$,

$\alpha = 28^{\circ}\ 44'\ 50''$. Donde achamos $\Sigma' = -11',973$, $\Sigma' \text{sen.}\, p \cos.\, \pi = -0',044$, e a distancia minima apparente $= -12',017 = -12'\ 1''$. E tendo mais $t = -1^{h}\ 10'\ 14''$, concluiremos a ☌ ás $8^{h}\ 10'\ 14''$, e a Longitude do Lugar $2^{h}\ 59'\ 32''$ para occidente de Paris. M. du Séjour (pag. 31.) achou justamente o mesmo resultado.

Em quanto á grandeza da phase: Suppondo $\sigma = 14',727$, e $s = 15',883$, teremos $s \text{ sen.}\, p \cos.\, \pi = 0',053$, e conseguintemente $s' = 15',825$, donde achamos $d = 7,044$ digitos austrais. E o mesmo acharíamos, se usassemos do semidiametro horizontal do Sol, com o apparente da Lua $14',781$, e a distancia minima apparente $-12',017$.

126. *Achar o Lugar, que ha de ter huma maxima phase dada na passagem do Sol pelo meridiano.*

Tomando o valor medio de p, e o de Σ' achado com os semidiametros horizontais, e fazendo

$$\text{sen.}\, \lambda = \frac{\Delta \cos.\, \alpha - \Sigma'}{p \cos.\, \alpha},$$

teremos proximamente

$$P = \lambda \pm D,$$

com que acharemos o seu p correspondente, o valor de

$$s' = s - s \text{ sen.}\, p \cos.\, \lambda,$$

e conseguintemente o de Σ', e o de α' pela equaçaõ

$$tg.\, \alpha' = \frac{\delta}{h \mp \gamma' g}.$$

E fazendo entaõ $\text{sen.}\, \lambda = \dfrac{\Delta \cos.\, \alpha - \Sigma' \cos.\, (\alpha' - \alpha)}{p \cos.\, \alpha}$, teremos

$$P = \lambda \pm D,$$

e

$$t = -\frac{\Sigma' \text{sen.}\, \alpha'}{h}.$$

Este Problema, fazendo $\Sigma' = 0$, reduz-se ao do n. 104, e pelo que dissemos naquelle lugar se conhecerá quando a passagem he a 0^{h}, ou a 12^{h}; advertindo-se tambem, que em $h \mp \gamma' g$ o sinal $-$ he para o primeiro caso, e $+$ para o segundo.

127. DEM. Primeiramente, como temos em geral

$$tg.\, \alpha' = \frac{\delta - \gamma' q \text{ sen.}\, H}{h - \gamma' g \cos.\, H} \text{ (n. 123.)},$$

e neste caso he sen. $H = 0$, e cos. $H = \pm 1$, será

$$\text{tg. } \alpha' = \frac{\delta}{h \mp \gamma' g}.$$

Depois, a equaçaõ tambem geral

$$\Sigma' \text{ cos. } (\alpha' - \alpha) = \Delta \text{ cos. } \alpha - p \text{ sen. } \pi \text{ cos. } (\alpha + \mu),$$

sendo $n = 0$, e conseguintemente

$$\mu = 0, \; p \text{ sen. } \pi = m = p \text{ sen. } (P \mp D),$$

se reduz a

$$\Sigma' \text{ cos. } (\alpha' - \alpha) = \Delta \text{ cos. } \alpha - p \text{ cos. } \alpha \text{ sen. } (P \mp D).$$

E por tanto, fazendo

$$\text{sen. } \lambda = \frac{\Delta \text{ cos. } \alpha - \Sigma' \text{ cos. } (\alpha' - \alpha)}{p \text{ cos. } \alpha},$$

teremos

$$P = \lambda \pm D,$$

tocando o sinal + ao caso de $H = 0°$, e — ao de $H = 180°$.

128. EXEMPLO: Em que Lugar foi o mesmo eclipse de 9 digitos na sua maxima phase, e ao meio-dia? Com $\sigma = 14',727$, e $s = 15',883$, teremos proximamente $\Sigma' = 6',786$ (n. 120.); e tomando $p = 54',01$, acharemos $\lambda = 43° 25'$, e $P = 48° 15'$ proximamente. Com este valor de P acharemos o de $p = 53',99$, e com o de ambos o de $\alpha' = 42° 16' 50''$. Acharemos tambem o semidiametro do Sol reduzido $s' = 15',702$, e com elle o valor exacto de $\Sigma' = 6',876$. E entaõ teremos o valor exacto de $\lambda = 43° 36' 0''$, o de $P = 48° 25' 31''$, e a Latitude do Lugar $= 48° 44' 41''$. E porque achamos $t = -0^h 11' 35''$, e he $T = 0^h$, teremos o tempo da $\acute{O} = T - t = 0^h 11' 35''$, e conseguintemente a Longitude do Lugar de $1^h 1' 49''$ para oriente de Paris. Do mesmo modo tomando Σ' negativo, acharíamos o primeiro valor de $\lambda = 76° 52'$, e o de $P = 81° 41'$; e continuando o resto do calculo, saberiamos em que ponto do Globo havia de ser a maxima phase de 9 digitos austrais ao meio-dia.

129. *Achar os Lugares, que haõ de ter huma maxima phase dada ao nascer, ou ao pôr do Sol.*

Neste caso, em que $s' = s$, será exacto o primeiro valor de Σ' (n. 120.). E com o valor medio de p, fazendo sen. $\lambda = \frac{\Delta \text{ cos. } \alpha - \Sigma'}{p}$, teremos proximamente

$$\text{sen. } P = \text{sen. } (\lambda \mp \alpha) \text{ cos. } D.$$

Com P acharemos o verdadeiro valor de p, e com o de ambos o de α' pela equaçaõ

$$\text{tg. } \alpha' = \frac{\delta \pm \gamma' p \text{ sen. } D \cos. (\lambda \mp \alpha)}{h + \gamma' p \text{ sen. } D \text{ sen. } (\lambda \mp \alpha)}.$$

E entaõ, fazendo novamente

$$\text{sen. } \lambda = \frac{\Delta \cos. \alpha - \Sigma' \cos. (\alpha' - \alpha)}{p},$$

teremos

$$\text{sen. } P = \text{sen. } (\lambda \mp \alpha) \cos. D, \quad \cos. H = - \text{ tg. } D \text{ tg. } P, \quad t = \frac{n - \Sigma' \text{ sen. } \alpha'}{h}.$$

Este Problema reduz-se tambem ao do n. 107, quando $\Sigma' = 0$. E em quanto aos sinais: os superiores saõ para o nascimento, e os inferiores para o occaso do Sol.

130. DEM. Na equaçaõ

$$\Sigma' \cos. (\alpha' - \alpha) = n \text{ sen. } \alpha - m \cos. \alpha + \Delta \cos. \alpha \text{ (n. 124.)},$$

substituindo os valores de

$$n = \pm p \sqrt{\left(1 - \frac{\text{sen.}^2 P}{\cos.^2 D}\right)}, \quad m = \frac{p \text{ sen. } P}{\cos. D} \text{ (n. 96.)},$$

e fazendo

$$\text{sen. } \lambda = \frac{\Delta \cos. \alpha - \Sigma' \cos. (\alpha' - \alpha)}{p},$$

teremos

$$\frac{\text{sen. } P \cos. \alpha}{\cos. D} \pm \text{sen. } \alpha \sqrt{\left(1 - \frac{\text{sen.}^2 P}{\cos.^2 D}\right)} = \text{sen. } \lambda.$$

Logo, suppondo $\text{sen. } \chi = \frac{\text{sen. } P}{\cos. D}$, teremos

$$\text{sen. } (\chi \pm \alpha) = \text{sen. } \lambda, \quad \chi = \lambda \mp \alpha,$$

e

$$\text{sen. } P = \text{sen. } (\lambda \mp \alpha) \cos. D.$$

E na equaçaõ

$$\text{tg. } \alpha' = \frac{\delta - \gamma' q \text{ sen. } H}{h - \gamma' g \cos. H} \text{ (n. 123.)},$$

como neste caso temos $\cos. H = - \text{ tg. } D \text{ tg. } P$ (n. 8.), será

$$q \text{ sen. } H = \mp p \text{ sen. } D \sqrt{\left(1 - \frac{\text{sen.}^2 P}{\cos.^2 D}\right)} = \mp p \text{ sen. } D \cos. (\lambda \mp \alpha),$$

e

$$g \cos. H = - p \text{ sen. } P \text{ tg. } D = - p \text{ sen. } D \text{ sen. } (\lambda \mp \alpha) :$$

Logo

$$\text{tg. } \alpha' = \frac{\delta \pm \gamma' p \text{ sen. } D \cos. (\lambda \mp \alpha)}{h + \gamma' p \text{ sen. } D \text{ sen. } (\lambda \mp \alpha)} .$$

131. EXEMPLO: Supponhamos, que no mesmo eclipse se procuraõ os Lugares, que haõ de ter por maxima phase o contacto exterior do limbo boreal do Sol ao nascer, ou ao pôr delle. Entaõ $\Sigma' = \sigma + s = 30',610$, e tomando $p = 54',01$, acharemos $\lambda = 9^\circ\ 17'\ 20''$. Donde para o nascer do Sol, teremos $\lambda - \alpha = - 19^\circ\ 27'\ 30''$, $P = - 19^\circ\ 23'\ 10''$, $p = 54',129$, $\alpha' = 31^\circ\ 11'\ 40''$, $\Sigma' \cos. (\alpha' - \alpha) = 30',583$. E dahi teremos exactamente $\lambda = 9^\circ\ 17'\ 50''$, $\lambda - \alpha = - 19^\circ\ 27'\ 0''$, $P = - 19^\circ\ 22'\ 40''$, a Latitude do Lugar $19^\circ\ 34'\ 44''$ austral, $H = - 88^\circ\ 18'\ 0''$, $T = 6^h\ 6'\ 48''$ da manhaã, $t = - 2^h\ 47'\ 34''$, a ☌ ás $8^h\ 54'\ 22''$, e o Lugar $2^h\ 15'\ 24''$ para occidente de Paris. Do mesmo modo o primeiro valor de λ dará para o occaso do Sol $\lambda + \alpha = 38^\circ\ 2'\ 10''$, $P = 37^\circ\ 52'\ 40''$, $p = 54',048$ etc.

132. Tomando Σ' negativo, acharemos outros dous Lugares, em que ha de haver igual phase na parte austral do Sol. Mas na deste exemplo naõ he possivel, porque entaõ teriamos λ imaginario por ser $\Delta \cos. \alpha - \Sigma' = 69',938$ maior que $54',01$. E em taes casos he facil de conhecer a menor phase possivel sobre a Terra, pois que deve ser quando $\Delta \cos. \alpha - \Sigma' = p$, donde acharemos $d = \frac{6 \left[\sigma + s - (p - \Delta \cos. \alpha) \right]}{s}$ (n. 120.). E assim no caso do nosso exemplo saberemos, que a menor phase austral foi de 6,02 digitos.

133. He tambem facil de ver, que entaõ he $\lambda = 90^\circ$; e conseguintemente, que os dous valores de P se reduzem a hum só, determinado pela equaçaõ sen. $P = \cos. \alpha \cos. D$. E assim no eclipse, de que tratamos, será $P = 60^\circ\ 53'\ 10''$, e a Latitude do Lugar $= 61^\circ\ 9'\ 32''$. Pela mesma rasaõ se vê, que o phenomeno ha de succeder no horizonte, ao nascer do Sol sendo α positivo, e ao pôr sendo negativo; e ao contrario no hemispherio austral, onde a minima phase he tambem ao contrario na parte boreal do Sol. E assim temos no nosso exemplo $H = - 98^\circ\ 43'\ 10''$, $T = 5^h\ 25'\ 7''$ da manhaã, $t = - 0^h\ 47'\ 24''$, a ☌ ás $6^h\ 12'\ 31''$, e a Longitude do Lugar $4^h\ 57'\ 15''$ para occidente de Paris.

134. *Achar o Lugar, que ha de ter huma maxima phase dada a huma hora dada.*

Faça-se

$$\text{tg.}\,\psi = \frac{\text{sen.}\,D\,\text{cos.}\,H + \text{tg.}\,\alpha\,\text{sen.}\,H}{\text{cos.}\,D};$$

e tomando o valor medio de p, e o de Σ' achado com os semidiametros horizontais, por se ignorar ainda a reducçaõ que deve ter o do Sol, faça-se tambem

$$\text{sen.}\,\lambda = \frac{(\Delta\,\text{cos.}\,\alpha - \Sigma')\,\text{cos.}\,\psi}{p\,\text{cos.}\,\alpha\,\text{cos.}\,D},$$

e teremos proximamente

$$P = \lambda + \psi.$$

Com o valor de P acharemos os de p, Σ', e α', servindo-nos para este da equaçaõ

$$\text{tg.}\,\alpha' = \frac{\delta - \gamma' q\,\text{sen.}\,H}{h - \gamma' g\,\text{cos.}\,H};$$

e entaõ, fazendo novamente

$$\text{sen.}\,\lambda = \frac{\left[\Delta\,\text{cos.}\,\alpha - \Sigma'\,\text{cos.}\,(\alpha' - \alpha)\right]\,\text{cos.}\,\psi}{p\,\text{cos.}\,\alpha\,\text{cos.}\,D},$$

teremos

$$P = \lambda + \psi,\quad t = \frac{n - \Sigma'\,\text{sen.}\,\alpha'}{h},\ \text{temp. da}\ \odot = T - t.$$

O angulo ψ he sempre agudo, positivo ou negativo conforme o numerador da sua tangente. E λ, quer seja positivo quer negativo, he indifferente para ser agudo, ou obtuso, e dará duas soluções todas as vezes que huma dellas naõ seja excluida por dar P maior que 90°. Donde se vê, que só terаõ ambas lugar, quando λ e ψ forem de differente sinal, e ao mesmo tempo o complemento de λ menor que ψ. E isto mesmo se entenderá no Problema do n. 109, ao qual este se reduz quando $\Sigma' = 0$.

135. DEM. A mesma equaçaõ fundamental

$$n\,\text{sen.}\,\alpha - m\,\text{cos.}\,\alpha + \Delta\,\text{cos.}\,\alpha = \Sigma'\,\text{cos.}\,(\alpha' - \alpha)\ \text{(n. 124.)},$$

pela substituiçaõ dos valores de $n = p\,\text{cos.}\,P\,\text{sen.}\,H$, e $m = p\,\text{sen.}\,P\,\text{cos.}\,D - p\,\text{sen.}\,D\,\text{cos.}\,P\,\text{cos.}\,H$, se reduz a

$$\text{sen.}\,P - \text{cos.}\,P\left(\frac{\text{sen.}\,D\,\text{cos.}\,H + \text{tg.}\,\alpha\,\text{sen.}\,H}{\text{cos.}\,D}\right) = \frac{\Delta\,\text{cos.}\,\alpha - \Sigma'\,\text{cos.}\,(\alpha' - \alpha)}{p\,\text{cos.}\,\alpha\,\text{cos.}\,D}.$$

Donde se segue, que fazendo

$$\text{tg.}\,\psi = \frac{\text{sen.}\,D\,\text{cos.}\,H + \text{tg.}\,\alpha\,\text{sen.}\,H}{\text{cos.}\,D},$$

e

$$\text{sen.}\,\lambda = \frac{\left[\Delta\,\text{cos.}\,\alpha - \Sigma'\,\text{cos.}\,(\alpha' - \alpha)\right]\text{cos.}\,\psi}{p\,\text{cos.}\,\alpha\,\text{cos.}\,D},$$

teremos

$$\text{sen.}\,(P - \psi) = \text{sen.}\,\lambda,$$

e

$$P = \lambda + \psi.$$

136. E porque para o tempo $T \pm 12^h$, e conseguintemente para o angulo horario $= H \pm 180°$, tem sen. H, e cos. H os mesmos valores numericos com os sinais contrarios, terá tambem ψ o mesmo valor com o sinal contrario, e para esse tempo será $P = \lambda - \psi$. E ambas as soluções teraõ lugar em quanto huma dellas naõ der P maior que 90°, porque entaõ só terá lugar a que o der menor, e no tempo que convier ao sinal de ψ; e isso até se chegar a $\lambda = \pm 90°$, que mostra o limite até onde he possivel o phenomeno sobre a Terra.

137. EXEMPLO: Pergunta-se em que Lugar foi o mesmo eclipse de 7,044 digitos austrais na sua maxima phase ás 7^h da manhaã. Teremos nesse caso $H = -75°$, e acharemos $\psi = -27°\ 1'\ 0''$. Com $p = 54',01$, e $\Sigma' = -11',963$, teremos tambem $\lambda = 75°\ 33'\ 20''$, e $P = 48°\ 32'\ 20''$ proximamente. Donde achamos os valores correctos de $p = 53',990$, $\Sigma' = -11',972$, $\alpha' = 32°\ 50'\ 50''$ com os quais temos $\Sigma'\,\text{cos.}\,(\alpha' - \alpha) = -11',942$, $\lambda = 75°\ 32'\ 50''$, e $P = 48°\ 31'\ 50''$, que he o mesmo que sendo dado no Problema do n. 122 nos fez achar a maxima phase, que aqui suppuzemos dada. E como temos tambem o mesmo valor de t, achamos a mesma Longitude do Lugar.

138. Para as 7^h da tarde, temos $H = -75° + 180° = 105°$, e $\psi = +27°\ 1'\ 0''$. Pelo que com o primeiro valor de $\lambda = 75°\ 33'\ 20''$ teriamos $P = 102°\ 34'\ 20''$. Donde concluiriamos, que naõ era possivel a dita phase ás 7^h da tarde. Mas todavia haveria outro Lugar que ás 7^h da manhaã teria a mesma phase, podendo-se tomar λ obtuso neste caso, por ser o seu complemento menor que ψ. E por tanto tomando o primeiro valor de $\lambda = 104°\ 26'\ 40''$ teremos $P = 77°\ 25'\ 40''$, com o qual acharemos $p = 53',871$, e $\alpha' = 33°\ 58'\ 0''$, ficando $\Sigma' = -11',963$ por ser insensivel a reducçaõ do semidiametro do Sol. E assim teremos novamente $\lambda = 104°\ 55'$, $P = 77°\ 4'$, e a Latitude do Lugar $= 77°\ 12'\ 23''$. Teremos mais $t = -0^h\ 12'\ 26''$, a ☌ ás $7^h\ 12'\ 26''$ da manhaã, e o Lugar $3^h\ 57'\ 20''$ para occidente de Paris.

139. Começamos nos calculos antecedentes pela supposiçaõ de cos.$(\alpha' - \alpha) = 1$, porque o angulo $\alpha' - \alpha$ he sempre pequeno. Mas quando naõ o for muito, deverá repetir-se outra vez o calculo no caso de se querer grande exactidaõ. E por outra parte, como estes calculos para cada phase se fazem para differentes horas consecutivas, se começarmos por aquella, em que α' differe pouco de α, em cada huma tomaremos o valor de $\alpha' - \alpha$ achado na antecedente.

140. He muito facil de saber em que hora ha de ser $\alpha' = \alpha$, porque nesse caso temos

$$\frac{\delta}{h} = \frac{\delta - \gamma' q \text{ sen. } H}{h - \gamma' g \text{ cos. } H},$$

donde se tira

$$\text{tg. } H = \frac{\delta q}{hg} = \frac{\text{tg. } \alpha}{\text{sen. } D},$$

valor constante para todos os casos do mesmo eclipse.

141. Se quizermos tambem saber a hora, em que $\alpha' - \alpha$ ha de ser hum maximo, differenciando a equaçaõ

$$\text{tg. } \alpha' (h - \gamma' g \text{ cos. } H) = \delta - \gamma' q \text{ sen. } H,$$

e suppondo $d\alpha' = 0$, teremos

$$\gamma' g \, dH \text{ sen. } H \text{ tg. } \alpha' = -\gamma' q \, dH \text{ cos. } H,$$

e conseguintemente

$$\text{tg. } H = -\frac{q}{g \text{ tg. } \alpha'} = -\frac{\text{sen. } D}{\text{tg. } \alpha'} = \frac{-h \text{ sen. } D + \gamma' g \text{ cos. } H}{\delta - \gamma' q \text{ sen. } H},$$

donde se tira

$$\delta \text{ tg. } H + h \text{ sen. } D = \gamma' q \left(\frac{\text{sen.}^2 H}{\text{cos. } H} + \text{cos. } H \right) = \frac{\gamma' q}{\text{cos. } H},$$

e

$$\delta \text{ sen. } H + h \text{ sen. } D \text{ cos. } H = \gamma' q,$$

ou

$$\text{tg. } \alpha \text{ sen. } H + \text{sen. } D \text{ cos. } H = \frac{\gamma' q}{h}.$$

Esta equaçaõ, passando H a notar-se H', e ficando H o que se achou pela equaçaõ $\text{tg. } H = \frac{\text{tg. } \alpha}{\text{sen. } D}$, se reduz á

$$\text{sen. } D (\text{sen. } H' \text{ tg. } H + \text{cos. } H') = \frac{\gamma' q}{h} = \frac{\gamma' g \text{ sen. } D}{h}.$$

Donde se segue que fazendo

$$\cos.\lambda = \frac{\gamma' p \cos.P \cos.H}{h},$$

teremos

$$\cos.(H' - H) = \cos.\lambda,$$

e

$$H' = H \pm \lambda.$$

142. Como pois no caso de $\alpha' = \alpha$ coincide a direcçaõ da orbita apparente com a da relativa, he claro que a supposiçaõ vulgar de ser a maxima phase quando a linha dos centros he perpendicular á dita orbita relativa, naõ he exacta senaõ no instante em que for $\text{tg.}\, H = \frac{\text{tg.}\, \alpha}{\text{sen.}\, D}$. Em todos os mais será erronea, e terá o seu maior erro quando o angulo horario H' for $= H \pm \lambda$ Este erro porém, em que tanto, e por tantas vezes insiste M. du Séjour, naõ o he senaõ no nome de *maxima;* porque aliás essa phase, que se dá por tal, e que differe muito pouco della, será a que exactamente corresponde ao tempo, e Lugar, achados pelo calculo.

143. Tendo-se tambem visto pelos exemplos antecedentes as pequenas correcções, que resultaõ de se começarem os calculos com o valor medio de p: He facil de entender, que para os annuncios destes phenomenos, e para a construcçaõ das Cartas delles no pequeno ponto a que se costumaõ reduzir, naõ sómente se pode fazer $\alpha' = \alpha$, mas tambem desprezar a ellipticidade da Terra, ficando nos resultados que der o valor medio de p, e tomando P pela Latitude do Lugar, sem attençaõ á reducçaõ della. Desse modo todos os calculos se reduziráõ a menos da ametade do tempo.

§. VIII.

Passagens de ♀ *e* ☿ *pelo disco do* ☉.

144. Estes phenomenos, taõ raros como importantes, naõ saõ mais do que eclipses do Sol, posto que sensivelmente o naõ pareçaõ, por ser muito pequena a parte da sua luz que elle perde pela interposiçaõ optica destes planetas, os quais por tanto saõ vistos como manchas negras e redondas, que atravessaõ o disco do mesmo Sol. E assim, fazendo elles o mesmo que a Lua nos eclipses ordinarios, ser-lhes-haõ applicaveis as mes-

mas formulas, com as modificações, e reducções, que convem a este caso particular.

145. Conservando pois todas as definições do Problema fundamental (n. 16.), mudado o nome de *astro* em *Sol*, e o de *Lua* em *Venus* ou *Mercurio*, a soluçaõ delle se accommodará evidentemente ao caso de que agora tratamos; advertindo-se que por ser retrogrado o movimento destes planetas na conjunçaõ inferior, sempre acharemos h negativo. Em rasaõ porém da distancia delles, da pequenhez das suas parallaxes, e da quasi uniformidade do seu movimento, podem desprezar-se naõ sómente os pequenos termos dependentes de η, η', d', p', mas tambem a ellipticidade da Terra, tomando por P a Latitude do Lugar sem reducçaõ alguma, e sem a das parallaxes.

146. Igualmente em todos os calculos destes phenomenos se póde tomar $S = \Sigma$, porque a reducçaõ Σ sen. p cos. π (em que p naõ he a differença das parallaxes mas sómente a do planeta (n. 22.)) apenas póde chegar nas circunstancias mais raras a $0'',16$; mas todavia se naõ desprezará quando das observações houvermos de concluir os elementos, hum dos quais he a parallaxe do Sol, cuja determinaçaõ só póde acertar-se bem por estes eclipses, e muito mais exactamente pelos de Venus, que saõ os mais raros.

147. *Dado o tempo da* σ *em A. R. achar o da minima distancia, e os da entrada e sahida, relativamente ao centro da Terra.*

Seja T o tempo da σ, e T' o da minima distancia (que neste caso he o meio da Passagem), Δ a differença das declinações na σ, Σ a soma dos semidiametros, $\text{tg.}\,\alpha = \frac{\delta}{h}$, $\cos.\,\phi = \frac{\Delta \cos.\,\alpha}{\Sigma}$: E teremos

$$T' = T - \frac{\Delta \text{ sen. } \alpha \cos.\,\alpha}{h},$$

$$\text{temp. da } \left\{ \begin{matrix} \text{entrada} \\ \text{sahida} \end{matrix} \right\} = T' \mp \frac{\Sigma \text{ sen. } \phi \cos.\,\alpha}{h},$$

$$\text{duraçaõ total} = \frac{2\Sigma \text{ sen. } \phi \cos.\,\alpha}{h}.$$

O angulo α he sempre obtuso, e positivo ou negativo conforme o for δ; ϕ he obtuso pela formula, porque cos. α he negativo, mas como delle se naõ usa aqui de outra funçaõ senaõ a do seno, póde tomar-se agudo.

148. DEM. Pela hypothese coincide a σ apparente com a verdadeira,

e temos $p = 0$. Donde se segue que as quantidades T'', Δ', α', h' da formula do n. 36, se reduzem a T, Δ, α, h; e a dita formula, á primeira antecedente. Em quanto á segunda: está claro, que ϕ he o angulo formado pela distancia dos centros Σ com a perpendicular á orbita relativa do planeta; e por conseguinte, que Σ sen. ϕ he ametade do espaço corrido pelo planeta durante o eclipse. Donde se segue, que sendo $\frac{h}{\cos.\alpha}$ a velocidade pela direcçaõ da orbita, será

$$\text{o tempo} = \frac{\Sigma \text{ sen. } \phi \cos. \alpha}{h}.$$

149. EXEMPLO: Tomaremos o da Passagem de Venus de 3 de Junho de 1769, de que usa M. du Séjour. Com os elementos delle achamos a σ em A. R. ás $9^h\ 55'\ 14''$ em Paris, $D = 22°\ 26'\ 30''$, $\Delta = 10',6685$, $\delta = -1',0769$, $h = -3',8628$, semidiametro do $\odot$ $s = 15',7867$, o de ς $\sigma = 0',4767$, a parallaxe do $\odot = 0',14367$, a de $\varsigma = 0',50417$, e $p = 0',3605$. E alem disso tomaremos delle tambem a distancia de ς ao $\odot$ na conjunçaõ $\rho = 0,72619$, e a do $\odot$ á $\mathfrak{h}$ (suppondo a media $= 1$) $r = 1,01515$.

Assim temos $\alpha = -164°\ 25'\ 20''$, $\Sigma = 16',2634$, $\phi = 50°\ 52'\ 20''$; e acharemos $T'' = 10^h\ 38'\ 6''$, a duraçaõ $6^h\ 17'\ 32''$, a entrada ás $7^h\ 29'\ 20''$ da tarde, e a sahida á $1^h\ 46'\ 52''$ da manhaã do dia 4, debaixo do horizonte. E isto, como he tudo no mesmo instante physico, se reduzirá ao tempo de qualquer outro Lugar, sendo conhecida a differença entre o meridiano delle, e o de Paris. E reciprocamente com huma Taboa dos arcos semidiurnos á vista se acharáõ as Longitudes dos Lugares em cada parallello, entre os quais se verá toda a Passagem, ou sómente a entrada, ou sómente a sahida, ou nenhuma dellas: salvo o desconto, que depende do pequeno effeito das parallaxes, que se calculará quando, e onde parecer conveniente.

150. *Achar o ponto do disco do Sol, por onde ha de ser a entrada do planeta.*

Sendo . . . . . .

a altura do pólo - - - - - - - - - - - - - - - - $= P$

a declinaçaõ do $\odot$ - - - - - - - - - - - - - - - $= D$

o angulo horario na entrada - - - - - - - - - - - - $= H$

o tempo della — o da σ - - - - - - - - - - - - $= t$

a soma dos semidiametros - - - - - - - - - - - - $= \Sigma$;

e fazendo $\cos. \Phi = \frac{\Delta + \delta t}{\Sigma}$, e $\text{tg.}\, \mu = \frac{\text{sen.}\, H}{\text{tg.}\, P \cos. D - \text{sen.}\, D \cos. H}$: o angulo $\mu - \Phi$ mostrará o ponto procurado, sendo contado do vertice do $\odot$ para occidente quando for positivo; e para oriente, quando negativo. E o angulo Φ he sempre obtuso, e de si positivo no caso, de que se trata.

151. He o mesmo que fica demonstrado (n. 49.), e sómente com a differença de que a entrada do planeta corresponde á sahida da Lua, e por isso toma Φ o sinal que lá se mostrou convir a esta ultima. E o angulo μ he tambem o mesmo que lá se calculou por meio dos numeros n, e m. E porque estes tem o factor commum p, que no caso presente se suppoem $= 0$, sendo hum e outro divididos por esse mesmo factor, daráõ a formula de que aqui nos servimos. E por outra parte he facil de ver que este angulo μ he o que fórma no centro do Sol o circulo vertical com o da declinaçaõ, assim cómo Φ he o que fórma a linha dos centros com o mesmo circulo de declinaçaõ.

Em Paris, por exemplo, teriamos $P = 48^\circ\ 50'$, $H = 112^\circ\ 22'\ 30''$, $t = -2^h, 432$, $\Delta + \delta t = 13', 288$, $\Sigma = 16', 263$, $\mu = 37^\circ\ 34'$, $\Phi = 35^\circ\ 12'$; e conheceriamos, que a entrada havia de ser por $2^\circ\ 22'$ do vertice do Sol para occidente, isto he, para a direita.

152. *Achar o effeito das parallaxes na duraçaõ da Passagem em qualquer Lugar determinado.*

Seja o angulo horario correspondente ao instante da conjunçaõ $= H$, a soma dos semidiametros $= \Sigma$: E suppostas as mais definições antecedentes, calculem-se as quantidades m, n, e $\text{tg.}\, \alpha' = \frac{\delta'}{h'}$, sendo

$$\delta' = \delta - \gamma' p \cos. P \text{ sen. } D \text{ sen. } H,$$

e

$$h' = h - \gamma' p \cos. P \cos. H.$$

Entaõ fazendo

$$\cos. \phi' = \frac{(\Delta - m) \cos. \alpha' + n \text{ sen. } \alpha'}{\Sigma},$$

será

$$\text{a semiduraçaõ da Passagem} = \frac{\Sigma \text{ sen. } \phi' \cos. \alpha'}{h'}.$$

153. DEM. Neste caso a equaçaõ

$$h\tau = g \text{ sen. } (H + \gamma\tau) \text{ (n. 32.)},$$

por ser τ muito pequeno, dará

$$\tau = \frac{g \text{ sen. } H}{h - \gamma' g \text{ cos. } H},$$

e teremos tambem

$$q \text{ cos. } (H + \gamma\tau) = q \text{ cos. } H - q\gamma'\tau \text{ sen. } H,$$

que pela substituiçaõ do valor de τ se reduz a

$$q \text{ cos. } (H + \gamma\tau) = q \text{ cos. } H - \frac{\gamma' g q \text{ sen.}^2 H}{h - \gamma' g \text{ cos. } H}.$$

Pelo que, substituindo tanto este valor, como o de τ, na equaçaõ

$$\Delta' = \Delta + \delta\tau - \left[6 - q \text{ cos. } (H + \gamma\tau) \right],$$

e reduzindo, teremos

$$\Delta' = \Delta + \frac{g \text{ sen. } H (\delta - \gamma' q \text{ sen. } H)}{h - \gamma' g \text{ cos. } H} - (6 - q \text{ cos. } H),$$

isto he,

$$\Delta' = \Delta + n \text{ tg. } \alpha' - m.$$

Logo, suppondo que α' calculado para H he sensivelmente o mesmo que para $H + \gamma\tau$, teremos o angulo ϕ' (n. 44.) pela equaçaõ

$$\text{cos. } \phi' = \frac{(\Delta - m) \text{ cos. } \alpha' + n \text{ sen. } \alpha'}{\Sigma};$$

e pela differença dos dous valores de t acharemos

$$\text{a semiduraçaõ da Passagem} = \frac{\Sigma \text{ sen. } \phi' \text{ cos. } \alpha'}{h'}.$$

E bem se vê, que se quizermos saber o principio e fim, naõ ha mais do que calcular o valor de τ para ter o tempo da conjunçaõ apparente, e applicar-lhe ambos os valores de t, como no lugar citado.

154. EXEMPLO: Pergunta-se a semiduraçaõ da Passagem proposta no Lugar, que no parallello austral de 10° teve o meio della ao meio-dia. Foi logo a conjunçaõ ás $11^h\ 17'\ 8''$ da manhaã, e $H = -10°\ 43'$. Donde achamos $m = -0',1910$, $n = -0',0665$, $\delta' = -1',0703$, $h' = -3',9541$, $\alpha' = -164°\ 51'\ 20''$, $\phi' = 49°\ 57'$, e a semiduraçaõ $= 3^h\ 2'\ 21''$. M. du Séjour achou $3^h\ 3'\ 3''$ (pag. 202.).

Em quanto á Longitude do Lugar, he claro que tendo pela hypothese o meio da Passagem ao meio-dia, que para Paris foi ás $10^h\ 38'\ 6''$ da tarde, outro tanto deveria estar para occidente. E naõ póde bem comprehender-

se, como o mesmo Séjour escusadamente fez depender esta determinaçaõ do calculo de muitas formulas, por onde a veio a achar de $10^h\ 37'\ 51''$: e isso em hum Problema, que elle propoem com o fim de ser practicado muitas vezes para formar Taboas relativas a cada huma das Passagens, das quais dá a primeira linha por exemplo (pag. 204.).

155. *Achar o Lugar que primeiro verá a entrada ao pôr do Sol, e o que ultimo verá a sahida ao nascer: assim como reciprocamente o primeiro que verá a entrada ao nascer, e o ultimo que verá o fim ao pôr do Sol.*

O primeiro caso he identicamente o mesmo que o do Problema do n. 87, trocado o nascer em pôr, e o pôr em nascer, por ser o movimento retrogrado; e para o segundo mudaremos $p+\Sigma$ em $p-\Sigma$, como lá tambem haviamos de fazer, se buscassemos os Lugares do principio e fim do eclipse annular no horizonte. Em ambos porém, como α he sempre obtuso, tal se tomará tambem λ; e sempre $\lambda-\alpha$ pertencerá ao nascer do Sol, e $\lambda+\alpha$ ao pôr.

156. EXEMPLO: Assim na Passagem, de que se trata, teremos $D = 22^\circ\ 26'\ 30''$, $\Delta = 10',6685$, $\alpha = -164^\circ\ 25'\ 20''$, $\Sigma = 16',2634$, $p+\Sigma = 16',624$; e no primeiro caso acharemos $\lambda = -141^\circ\ 49'$. Donde, para a sahida ao nascer do Sol, será $\lambda-\alpha = 22^\circ\ 36'\ 20''$, $P = 20^\circ\ 48'\ 40''$, $H = -99^\circ\ 1'\ 50''$, $T = 5^h\ 23'\ 53''$, $t = 3^h\ 58'\ 23''$, a σ á $1^h\ 25'\ 30''$ da manhaã, e o Lugar $3^h\ 30'\ 16''$ para oriente de Paris. E para a entrada ao pôr do Sol, $\lambda+\alpha = -306^\circ\ 14'\ 20'' = +53^\circ\ 45'\ 40''$, $P = 48^\circ\ 12'$, $H = 117^\circ\ 30'\ 50''$, $T = 7^h\ 50'\ 3''$, $t = -2^h\ 32'\ 39''$, a σ ás $10^h\ 22'\ 42''$ da tarde, e o Lugar $0^h\ 27'\ 28''$ para oriente de Paris.

157. No segundo caso porém com $p-\Sigma = -15',903$ achamos $\lambda = 139^\circ\ 44'\ 40''$. E por tanto, para a entrada ao nascer do Sol, será $\lambda-\alpha = 304^\circ\ 10' = -55^\circ\ 50'$, $P = -49^\circ\ 53'$, $H = -60^\circ\ 38'\ 50''$, $T = 7^h\ 57'\ 25''$, $t = -2^h\ 18'\ 44''$, a σ ás $10^h\ 16'\ 9''$, e o Lugar $11^h\ 39'\ 5''$ para occidente de Paris. E para a sahida ao pôr do Sol: $\lambda+\alpha = -24^\circ\ 40'\ 40''$, $P = -22^\circ\ 41'\ 40''$, $H = 80^\circ\ 3'\ 10''$, $T = 5^h\ 20'\ 13''$, $t = 3^h\ 44'\ 28''$, a σ á $1^h\ 35'\ 45''$ da tarde, e o Lugar $8^h\ 19'\ 29''$ para occidente de Paris.

158. Este segundo caso dá pontos quasi diametralmente oppostos aos do primeiro: E a differença, bem como a da duraçaõ das passagens, que he pelo meridiano inferior de $6^h\ 31'\ 2''$, e pelo superior de $6^h\ 3'\ 12''$, vem do effeito das parallaxes, que em hum caso chegaõ a corda da passagem

para o centro, e no outro a afastaõ. Se fizessemos $p = o$, acharíamos os pontos exactamente antipodas, as duraçõens iguais entre si, e á calculada para o centro da Terra.

159. *Achar os pontos do Globo mais vantajosos para a observaçaõ destes phenomenos.*

He claro, que estes pontos seraõ onde for maior o effeito das parallaxes, isto he, onde for a maxima, e a minima duraçaõ, os quais ao modo ordinario se acharíaõ pela differenciaçaõ da formula $\frac{\Sigma \text{ sen. } \phi' \text{ cos. } \alpha'}{h'}$, fazendo nella variar as quantidades P, e H. Mas este meio alem de conduzir a formulas excessivamente complicadas, daria hum resultado equivoco, ou indeterminado, em quanto á Latitude, porque em huma infinidade de parallellos, dentro de certos limites, terá lugar a maxima, ou minima duraçaõ, se naõ exactamente, ao menos com a approximaçaõ maior practica, que se póde dezejar. E assim do Problema antecedente tiraremos quanto nos he necessario a esse respeito.

160. Como pois a passagem pelo meridiano inferior he no nosso caso de $6^h\ 31'\ 2''$, essa será a maxima que poderia observar-se em hum ou muitos pontos desde o parallello boreal de 20° 49' até o de 48° 12', se a espessura da Terra o naõ embaraçasse. He por tanto necessario desta parte avançar mais para o norte até o parallello, onde se ha de ver a entrada ao pôr, e a sahida ao nascer do Sol, sendo o meio da passagem á meia-noite. Esse parallello se acha ser o de 57° 55' 40'' no nosso exemplo, e a Longitude do Lugar de $1^h\ 21'\ 54''$ para oriente de Paris, no qual se observaria a semiduraçaõ de $3^h\ 14'\ 56''$ com 35'' de menos que a maxima. E o meridiano indicado neste caso particular nos mostra que a mesma maxima seria observada de todos os pontos delle comprehendidos entre os parallellos sobreditos, ou rigorosamente, ou sem differença sensivel.

161. Por huma analogia similhante concluiremos, que no meridiano opposto de $10^h\ 38'\ 6''$ para occidente de Paris, onde havia de ser o meio da passagem ao meio-dia, se havia de observar a minima duraçaõ de $6^h\ 3'\ 12''$ desde o parallello austral de 22° 42' até o de 49° 52', e pouco a pouco maior para fóra delles, de huma e outra parte; porque no Equador se acharia a semiduraçaõ de $3^h\ 2'\ 57''$, e no parallello austral de 59° 35' 10'', onde a entrada havia de ser ao nascer e a sahida ao pôr do Sol se acharia de $3^h\ 2'\ 15''$ com 39'' sómente de mais que a minima. E daqui se vê, que na dita Passagem se perderaõ os dous pontos mais importan-

tes no Mar Pacifico, que eraõ o da ilha Hervey por 19° 17' de Latitude austral e 10ʰ 44' 32" para occidente, e o da ilha Mangea por 21° 56' 45" de Latitude, e 10ʰ 41' 32" para occidente de Paris.

162. *Dado o tempo entre os contactos externo e interno de qualquer das partes, achar o semidiametro do planeta.*

Sendo o semidiametro do $\odot = s$, o do planeta $= \sigma$, a ametade do tempo entre os contactos $= \tau$, e suppostas as mais definições antecedentes, para o tempo da entrada ou sahida do centro, ou para o meio do intervallo entre os contactos, busque-se o angulo α' pela equaçaõ tg. $\alpha' = \frac{\delta'}{h'}$, sendo $\delta' = \delta - \gamma' q$ sen. H, e $h' = h - \gamma' g$ cos. H. E tendo feito sen. $\phi = \frac{\Delta \cos. \alpha}{s}$, teremos

$$\sigma = \frac{h' \tau \cos. [\phi \pm (\alpha' - \alpha)]}{\cos. \alpha'}.$$

O angulo ϕ toma-se sempre agudo, e por ser cos. α sempre negativo, será elle tambem negativo no caso de Δ ser boreal; e no de ser austral, será positivo. E o sinal $+$ pertence á entrada, e $-$ á sahida.

163. DEM. He evidente, que ϕ he o angulo que fórma a corda da passagem com o semidiametro do Sol; e facil de ver, por huma figura, que $\phi + (\alpha' - \alpha)$ he o formado pela corda apparente com o mesmo semidiametro na entrada, e $\phi - (\alpha' - \alpha)$ na sahida. Mas para se chegar o centro do planeta para o do Sol a quantidade σ, he necessario que ande pela orbita apparente o espaço $\frac{\sigma}{\cos. [\phi \pm (\alpha' - \alpha)]}$, e com a velocidade apparente $= \frac{h'}{\cos. \alpha'}$.

Logo

$$\frac{h' \tau}{\cos. \alpha'} = \frac{\sigma}{\cos. [\phi \pm (\alpha' - \alpha)]},$$

e conseguintemente

$$\sigma = \frac{h' \tau \cos. [\phi \pm (\alpha' - \alpha)]}{\cos. \alpha'}.$$

164. EXEMPLO: Na Passagem, de que tratamos, temos $\Delta = 10',6685$, $\alpha = -164° 25' 20''$, e $s = 15',79$, donde achamos $\phi = -40° 36' 20''$,

que convem a todas as observações della, e em todos os Lugares. Na da California (para sempre memoravel pela vida que custou a M. l'Abbé Chappe, que a fez!) por 23° 3′ 42″ de Latitude boreal, foi na entrada $H = 2° 5′ 30″$, $\delta' = 1′,0781$, $h' = -3′,9496$, $\alpha' = -164° 44′$, $\phi + (\alpha' - \alpha) = -40° 55′$, $\tau = 0^h,15139$, e $\sigma = 0′,46835 = 28″,101$. E na sahida foi $H = 91° 1′ 15″$, $\delta' = -1′,100$, $h' = -3′,8613$, $\alpha' = -163° 57′ 40″$, $\phi - (\alpha' - \alpha) = -41° 4′$, $\tau = 0^h,15417$, e $\sigma = 0′,467 = 28″,02$, donde temos o resultado medio desta observaçaõ $\sigma = 28″,06$. Pela de Taiti achamos $\sigma = 27″,94$; e o meio de ambas dá $\sigma = 28″,00$ com exactidaõ muito superior á de huma medida immediata.

165. *Dada a parallaxe do Sol, ou a do planeta, ou a differença dellas no tempo da conjunçaõ, achar qualquer das outras duas.*

Supponhamos a do Sol $= \pi$, a do planeta $= p'$, e a differença dellas $= p$: a distancia do Sol á Terra $= r$, ao planeta $= \rho$, e conseguintemente a deste á Terra $= r - \rho$; distancias dadas exactissimamente pelas Taboas, naõ na sua grandeza absoluta, mas na relativa, da qual tambem depende a relaçaõ das parallaxes. Como pois estas saõ na rasaõ reciproca das distancias, teremos $p' : \pi :: r : r - \rho$, e $p' - \pi : \pi :: \rho : r - \rho$. Donde se derivaõ as equações seguintes

$$\pi = \frac{p(r-\rho)}{\rho} = \frac{p'(r-\rho)}{r},$$

$$p = \frac{\pi\rho}{r-\rho} = \frac{p'\rho}{r},$$

$$p' = \frac{\pi r}{r-\rho} = \frac{pr}{\rho}.$$

166. *Dada a observaçaõ completa de huma Passagem, achar o tempo da conjunçaõ, a differença das declinações, a das parallaxes, e o semidiametro do Sol.*

He justamente o caso do Problema do n. 81 pelo que respeita a $d\Delta$, $dT°$, dp. E sómente differe no quarto elemento, que em vez da ellipticidade da Terra, que aqui naõ he de influencia alguma, deverá ser o semidiametro do Sol s, de que se buscará a correcçaõ ds. Porque sendo a distancia apparente dos centros no contacto externo $S = s + \sigma$, e no interno $= s - \sigma$, e tendo-se já achado o valor exacto de σ (n. 162.), he claro que estas distancias, que se suppoem observadas, levaõ em si o erro do valor hypothetico de s, ou tomado das Taboas, ou de huma medida

immediata; erro, que influe na determinaçaõ dos outros elementos, e por isso deve ser determinado juntamente com os delles. E porque naõ depende de M, nem de N, ainda facilita mais a applicaçaõ do dito Problema, sendo evidente que por essa rasaõ cada hum dos seus primeiros coefficientes C, C', C'', C''' (n. 82.) se reduz á unidade.

167. Calculando pois com os elementos hypotheticos para os tempos dos contactos T, T' etc. as distancias reduzidas Σ, Σ' etc., e tendo de caminho reduzido tambem as apparentes hypotheticamente observadas S, S' etc. pelas formulas $\Sigma = S - S \operatorname{sen.} p' \cos. \pi$ (n. 145.) etc.: Faremos

$$\Sigma\ (\text{obs.}) - \Sigma\ (\text{calc.}) = d\Sigma$$
$$\Sigma'\ (\text{obs.}) - \Sigma'\ (\text{calc.}) = d\Sigma'$$
$$\Sigma''\ (\text{obs.}) - \Sigma''\ (\text{calc.}) = d\Sigma''$$
$$\Sigma'''\ (\text{obs.}) - \Sigma'''\ (\text{calc.}) = d\Sigma'''$$
$$B = \operatorname{sen.} \pi \cos. (\mu - \phi)$$
$$B' = \operatorname{sen.} \pi' \cos. (\mu' - \phi')$$
$$B'' = \operatorname{sen.} \pi'' \cos. (\mu'' - \phi'')$$
$$B''' = \operatorname{sen.} \pi''' \cos. (\mu''' - \phi''')$$

$$A = \frac{h \operatorname{sen.} (\phi + \alpha)}{\cos. \alpha}$$
$$A' = \frac{h \operatorname{sen.} (\phi' + \alpha)}{\cos. \alpha}$$
$$A'' = \frac{h \operatorname{sen.} (\phi'' + \alpha)}{\cos. \alpha}$$
$$A''' = \frac{h \operatorname{sen.} (\phi''' + \alpha)}{\cos. \alpha}$$

$$F = A \cos. \phi' - A' \cos. \phi \qquad E = \cos. \phi' - \cos. \phi$$
$$F' = A' \cos. \phi'' - A'' \cos. \phi' \qquad E' = \cos. \phi'' - \cos. \phi'$$
$$F'' = A'' \cos. \phi''' - A''' \cos. \phi'' \qquad E'' = \cos. \phi''' - \cos. \phi''$$
$$G = B \cos. \phi' - B' \cos. \phi \qquad K = FG' - F'G$$
$$G' = B' \cos. \phi'' - B'' \cos. \phi' \qquad K' = F'G'' - F''G'$$
$$G'' = B'' \cos. \phi''' - B''' \cos. \phi'' \qquad L = FE' - F'E$$
$$f = d\Sigma' \cos. \phi - d\Sigma \cos. \phi' \qquad L' = F'E'' - F''E'$$
$$f' = d\Sigma'' \cos. \phi' - d\Sigma' \cos. \phi'' \qquad k = Ff' - F'f$$
$$f'' = d\Sigma''' \cos. \phi'' - d\Sigma'' \cos. \phi''' \qquad k' = F'f'' - F''f'$$
$$R = KL' - K'L \qquad r = Kk' - K'k.$$

Donde acharemos

$$ds = \frac{r}{R}, \quad dp = \frac{k - L\,ds}{K}, \quad dT^\circ = \frac{f - G\,dp - E\,ds}{F},$$

$$d\Delta = \frac{d\Sigma + A\,dT^\circ + B\,dp + ds}{\cos. \phi}.$$

168. EXEMPLO: Para fazermos a applicaçaõ destas formulas á observaçaõ da California, pareceu-nos conveniente verificar immediatamente pelas Taboas os valores de δ, e de h, de cuja exactidaõ depende tudo; e achamos $\delta = -1{,}07221$, $h = -3',85169$, e conseguintemente $\alpha = -164^\circ\ 26'\ 40''$. Pelo que suppondo a conjunçaõ ás $2^h\ 27'\ 4''$, $\Delta = 10',6685$, $s = 15',7867$, $\sigma = 0',4665$, $p' = 30'',25$, $p = 0',3605$; e tendo achado $6 = 0',130518$, $\log. g = 9.520734$, e $\log. q = 9.102505$: o resto do calculo dará os resultados seguintes, onde as letras da primeira columna se entenderaõ nas tres seguintes, sendo marcadas com $'$, $''$, $'''$.

$T = 11^h\ 59'\ 17''$	$0^h\ 17'\ 27''$	$5^h\ 54'\ 50''$	$6^h\ 13'\ 20''$
$S = 16',2532$	$15',3202$	$15',3202$	$16',2532$
$H = -0^\circ\ 10'\ 45''$	$4^\circ\ 21'\ 45''$	$88^\circ\ 42'\ 30''$	$93^\circ\ 20'\ 0''$
$n = -0',0010372$	$0',025231$	$0',33161$	$0',33113$
$m = 0',003898$	$0',004264$	$0',12767$	$0',13788$
$\mu = -14^\circ\ 53'\ 40''$	$80^\circ\ 23'\ 40''$	$68^\circ\ 56'\ 40''$	$67^\circ\ 23'\ 40''$
sen. $\pi = 8.048966$	8.851154	9.993726	9.997811
red. $= -0',0024$	$-0',0022$	$-0',0004$	$-0',0002$
$\Sigma = 16',2508$	$15',3180$	$15',3198$	$16',2530$
$t = -2^h,46305$	$-2^h,16028$	$3^h,46278$	$3^h,77111$
$lN = 0.977172$	0.918842	-1.135740	-1.171908
$lM = 1.124031$	1.113291	0.834295	0.812059
$\phi = 35^\circ\ 29'\ 30''$	$32^\circ\ 34'\ 54''$	$-63^\circ\ 27'\ 25''$	$-66^\circ\ 24'\ 40''$
cos. $\phi = 9.910731$	9.925634	9.650181	9.602246
$\Sigma = 16',3418$	$15',4049$	$15',2797$	$16',2111$
$d\Sigma = -0',0910$	$-0',0869$	$0',0401$	$0',0419$
$lA = -0.492650$	$lB = 7.853522$	$lF = -9.291213$	
$lA' = -0.473868$	$lB' = 8.678238$	$lF' = -0.583236$	
$lA'' = 0.472258$	$lB'' = -9.822592$	$lF'' = -9.297760$	
$lA''' = 0.491472$	$lB''' = -9.838051$	$lG = -8.515853$	
$lE = 8.453685$	$lf = 7.772666$	$lG' = 9.764439$	
$lE' = -9.597425$	$lf' = 8.861069$	$lG'' = 8.621187$	
$lE'' = -8.669298$	$lf'' = 7.427648$	$lk = 7.929097$	
$lK = -9.378944$	$lL = 9.270108$	$lk' = 7.619271$	
$lK' = -8.650443$	$lL' = 9.001353$	$lR = -8.195254$	
		$lr = -6.790285$	

$ds = +0',0393$, $dp = -0',0048$, $dT^\circ = -0^h,0244$, $d\Delta = +0',0297$.

169. A primeira cousa pois que se conclue desta memoravel observaçaõ, he que naõ tem lugar nenhum nestes eclipses o desconto da irradiaçaõ no semidiametro do Sol, como até agora se acreditou; naõ sómente porque em vez de diminuiçaõ dá hum pequeno augmento para elle, mas tambem porque isso se confirma pela concordancia dos outros elementos, como logo veremos.

170. Depois disso nos dá $p = 0',3556$, donde se segue a parallaxe do Sol $\pi = 8'',491$ (n. 165.). M. du Séjour (pag. 483.) pelas suas equações de condiçaõ calculadas sobre muitas observações a faz de $8'',681$; e isso na hypothese de huma irradiaçaõ $d\sigma = -3'',5$, que lhe parecia ter descuberto pelo eclipse do Sol de 1764. Fazendo porém $d\sigma = +2'',7$ para reduzir o semidiametro do Sol ao que dá a observaçaõ, de que tratamos, os mesmos calculos delle vem a dar $\pi = 8'',594$ mais chegado para o que dá aquella unica observaçaõ.

171. As outras duas correcções $d\Gamma^a$, e $d\Delta$, daõ a conjunçaõ no Lugar da observaçaõ ás $2^h\ 25'\ 36''$ com a differença das declinações $\Delta = 10',6982$; e reduzindo á ecliptica (n. 56.), a conjunçaõ em Longitude ás $2^h\ 45'\ 32''$ (ás $10^h\ 13'\ 42''$ em Paris) com a Latitude de Venus $10'\ 25'',3$. E aqui se faz mais sensivel o effeito da supposta irradiaçaõ, porque em rasaõ della acha o mesmo Autor $10'\ 13'',2$; mas fazendo $d\sigma = +2'',7$, acharia $10'\ 23'',1$.

172. O que porém mostra decisivamente que a irradiaçaõ do Sol naõ se deve descontar nos eclipses delle, he o semidiametro de Venus qual teve lugar na Passagem, de que se trata, que o mesmo Autor acha de $28'',352$ na supposiçaõ da irradiaçaõ, e tal o naõ daõ as observações. Mas fazendo $d\sigma = +2'',7$, o acharia de $28'',06$ muito conforme ao que daõ as mesmas observações (n. 164.).

173. Por outra parte, se naõ fosse a grande facilidade com que se recebem e adoptaõ quaisquer novidades sem maior exame, era bem facil de advertir, que vai muita differença do astro que eclipsa ao eclipsado. Venus, quando illuminada pelo Sol, tem certamente irradiaçaõ, e essa naõ se lhe desconta quando he eclipsada pela Lua, mas vindo ella a eclipsar o Sol desappareceo de todo essa irradiaçaõ juntamente com a illuminaçaõ que a produzia, e naõ póde eclipsar senaõ com o seu proprio volume. E o Sol, ainda que todo fosse irradiaçaõ de hum pequeno fóco central, naõ poderia ser eclipsado pela interposiçaõ de hum corpo opaco, senaõ assim e da mesma maneira que o haveria de ser, se o seu disco luminoso assentasse todo sobre huma superficie solida.

174. Ha com tudo outra causa, mais physica do que optica, que difficulta a observaçaõ dos contactos, e essa consiste no embaraço da luz a montar a interposiçaõ de qualquer corpo. Ou seja pela atracçaõ delle, ou pela da materia da mesma luz entre si, que embaraça a emissaõ separada de hum fio muito delicado della, he certo que se observa huma especie de repreza, e que quando chega a vencer o obstaculo apparece de repente naõ já o bordo do Sol, mas hum segmento de largura sensivel, e humas vezes maior, outras menor. E por isso naõ póde observar-se o contacto senaõ pela concurrencia estimada das duas circunferencias em hum ponto, levando-se no olho a producçaõ dellas sobre o ligamento ou protuberancia obscura que alli se fórma: no que seraõ mais felizes os observadores vindouros, se usarem de telescopios da maior amplificaçaõ que for possivel, sem prejuizo da distinçaõ.

175. He de advertir, que naõ se tendo feito em qualquer parte a observaçaõ completa dos quatro contactos, naõ ficaráõ com tudo inuteis as que se fizerem. Podem combinar-se com as feitas em outros Lugares com tanto que seja conhecida a differença dos meridianos. E para isso naõ ha mais do que sujeitar o tempo hypothetico da conjunçaõ á dita differença, para ficar correspondendo ao mesmo instante physico, e ser conseguintemente a correcçaõ dT° a mesma em ambas as partes.

176. Advirta-se tambem, que havendo mais observadores, e differindo poucos segundos na observaçaõ de qualquer phase, naõ ha duvida que se deverá tomar o meio arithmetico ao modo ordinario. Sendo porém maior a differença, o Problema do n. 162 nos offerece o criterio para distinguir qual das observações deve ter a preferencia, ou se a deve ter o dito meio. Porque sendo já conhecido σ por outras observações, e ajustando-se os observadores no contacto vizinho, calcularemos o tempo até o outro, em que discrepaõ, pela formula $\frac{2\sigma \cos.\alpha'}{h' \cos.\left[\phi \pm (\alpha' - \alpha)\right]}$; e esse decidirá a questaõ.

Na observaçaõ do Forte do Principe de Galles na Bahia de Hudson, por exemplo, concordáraõ muito bem Dymond e Walles no contacto interno da sahida, que o primeiro julgou ás 7^{h} 0′ 49″, e o segundo a 47″ (Séj. pag. 473.), donde se póde tomar seguramente o meio 48″. Mas no externo discordáraõ muito, fazendo-o Dymond ás 7^{h} 19′ 21″, e Walles ás 7^{h} 19′ 2″. Tendo pois $\sigma = 0',468$, como tambem se acha pela entrada na mesma observaçaõ, para a sahida estimada do centro acharemos $H =$

14-25

$107° 29' 15''$, $h' = 3',8481$, $\alpha' = -164° 7' 10''$, $\psi - (\alpha' - \alpha) = -40° 64' 30''$, e o tempo procurado $18' 35''$, que junto ao do contacto interno $7^h 0' 48''$ dá o do externo ás $7^h 19' 23''$, e por conseguinte a observaçaõ de Dymond he sómente a de que se deve usar.

Paço de Queluz 10 de Julho de 1806.

JOSÉ MONTEIRO DA ROCHA.

Da parallaxe da Lua, e da Latitude dos Lugares.

Latitude.	Red. da Lat. —		Red. da parall. — Parall. Equat. 53′	57′	61′	Latitude.	Red. de Lat. —		Red. da parall. — Parall. Equat. 53′	57′	61′
0°	0′	0″	0′,000	0′,000	0′,000	45°	11′	28″	0′,088	0′,095	0′,102
1	0	24	0 ,000	0 ,000	0 ,000	46	11	27	0 ,091	0 ,098	0 ,105
2	0	48	0 ,000	0 ,000	0 ,000	47	11	26	0 ,095	0 ,102	0 ,109
3	1	12	0 ,000	0 ,001	0 ,001	48	11	24	0 ,098	0 ,105	0 ,112
4	1	36	0 ,001	0 ,001	0 ,001	49	11	21	0 ,101	0 ,108	0 ,116
5	1	59	0 ,001	0 ,001	0 ,002	50	11	17	0 ,104	0 ,111	0 ,119
6	2	23	0 ,002	0 ,002	0 ,002	51	11	13	0 ,107	0 ,115	0 ,123
7	2	46	0 ,003	0 ,003	0 ,003	52	11	7	0 ,110	0 ,118	0 ,126
8	3	10	0 ,003	0 ,004	0 ,004	53	11	1	0 ,113	0 ,121	0 ,130
9	3	33	0 ,004	0 ,005	0 ,005	54	10	54	0 ,116	0 ,124	0 ,133
10	3	55	0 ,005	0 ,006	0 ,006	55	10	46	0 ,119	0 ,127	0 ,136
11	4	18	0 ,006	0 ,007	0 ,007	56	10	37	0 ,121	0 ,131	0 ,140
12	4	40	0 ,008	0 ,008	0 ,009	57	10	28	0 ,124	0 ,134	0 ,143
13	5	1	0 ,009	0 ,010	0 ,010	58	10	18	0 ,127	0 ,137	0 ,146
14	5	23	0 ,010	0 ,011	0 ,012	59	10	7	0 ,130	0 ,140	0 ,149
15	5	44	0 ,012	0 ,013	0 ,014	60	9	55	0 ,132	0 ,142	0 ,153
16	6	4	0 ,013	0 ,014	0 ,015	61	9	43	0 ,135	0 ,145	0 ,156
17	6	24	0 ,015	0 ,016	0 ,017	62	9	30	0 ,138	0 ,148	0 ,159
18	6	44	0 ,017	0 ,018	0 ,019	63	9	16	0 ,140	0 ,151	0 ,161
19	7	3	0 ,019	0 ,020	0 ,022	64	9	2	0 ,143	0 ,153	0 ,164
20	7	22	0 ,021	0 ,022	0 ,024	65	8	47	0 ,145	0 ,156	0 ,167
21	7	40	0 ,023	0 ,024	0 ,026	66	8	31	0 ,147	0 ,159	0 ,170
22	7	58	0 ,025	0 ,027	0 ,029	67	8	14	0 ,150	0 ,161	0 ,172
23	8	14	0 ,027	0 ,029	0 ,031	68	7	58	0 ,152	0 ,163	0 ,175
24	8	31	0 ,029	0 ,031	0 ,034	69	7	40	0 ,154	0 ,166	0 ,177
25	8	47	0 ,032	0 ,034	0 ,036	70	7	22	0 ,156	0 ,168	0 ,180
26	9	2	0 ,034	0 ,037	0 ,039	71	7	3	0 ,158	0 ,170	0 ,182
27	9	16	0 ,036	0 ,039	0 ,042	72	6	44	0 ,160	0 ,172	0 ,184
28	9	30	0 ,039	0 ,042	0 ,045	73	6	24	0 ,162	0 ,174	0 ,186
29	9	43	0 ,042	0 ,045	0 ,048	74	6	4	0 ,163	0 ,176	0 ,188
30	9	55	0 ,044	0 ,048	0 ,051	75	5	44	0 ,165	0 ,177	0 ,190
31	10	7	0 ,047	0 ,050	0 ,054	76	5	23	0 ,166	0 ,179	0 ,191
32	10	18	0 ,050	0 ,053	0 ,057	77	5	1	0 ,168	0 ,180	0 ,193
33	10	28	0 ,052	0 ,056	0 ,060	78	4	40	0 ,169	0 ,182	0 ,195
34	10	37	0 ,055	0 ,059	0 ,064	79	4	18	0 ,170	0 ,183	0 ,196
35	10	46	0 ,058	0 ,063	0 ,067	80	3	55	0 ,171	0 ,184	0 ,197
36	10	54	0 ,061	0 ,066	0 ,070	81	3	33	0 ,172	0 ,185	0 ,198
37	11	1	0 ,064	0 ,069	0 ,074	82	3	10	0 ,173	0 ,186	0 ,199
38	11	7	0 ,067	0 ,072	0 ,077	83	2	46	0 ,174	0 ,187	0 ,200
39	11	13	0 ,070	0 ,075	0 ,081	84	2	23	0 ,175	0 ,188	0 ,201
40	11	17	0 ,073	0 ,079	0 ,084	85	1	59	0 ,175	0 ,189	0 ,202
41	11	21	0 ,076	0 ,082	0 ,088	86	1	36	0 ,176	0 ,189	0 ,202
42	11	24	0 ,079	0 ,085	0 ,091	87	1	12	0 ,176	0 ,189	0 ,203
43	11	26	0 ,082	0 ,088	0 ,095	88	0	48	0 ,176	0 ,190	0 ,203
44	11	27	0 ,085	0 ,092	0 ,098	89	0	24	0 ,177	0 ,190	0 ,203
45	11	28	0 ,088	0 ,095	0 ,102	90	0	0	0 ,177	0 ,190	0 ,203

Estas reducções foraõ calculadas para a ellipticidade de $\frac{1}{300}$. Mas ajuntando-se a cada huma os seus dous terços, a ametade, e os tres decimos, ficaráõ correspondendo ás ellipticidades de $\frac{1}{180}$, $\frac{1}{200}$, $\frac{1}{230}$.

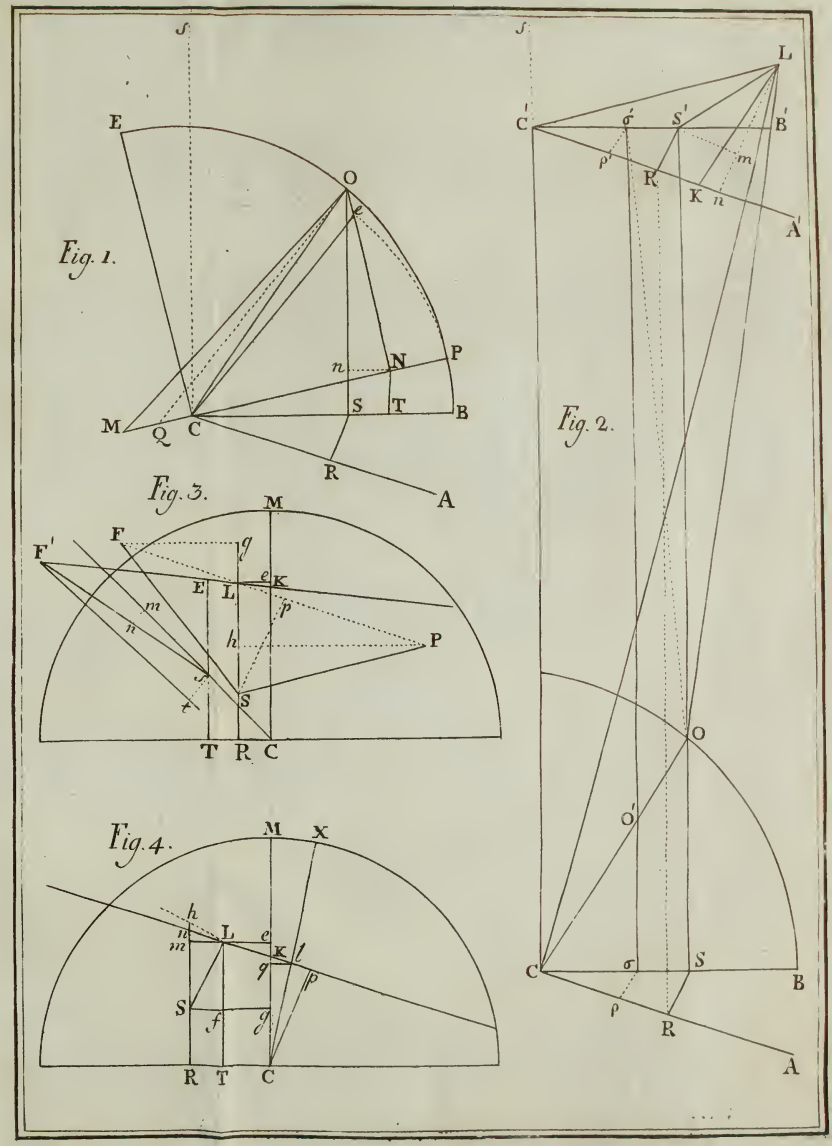
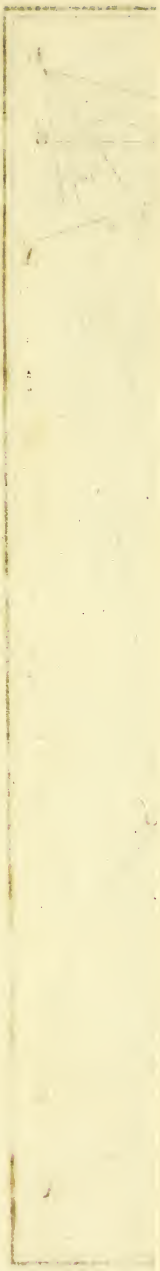
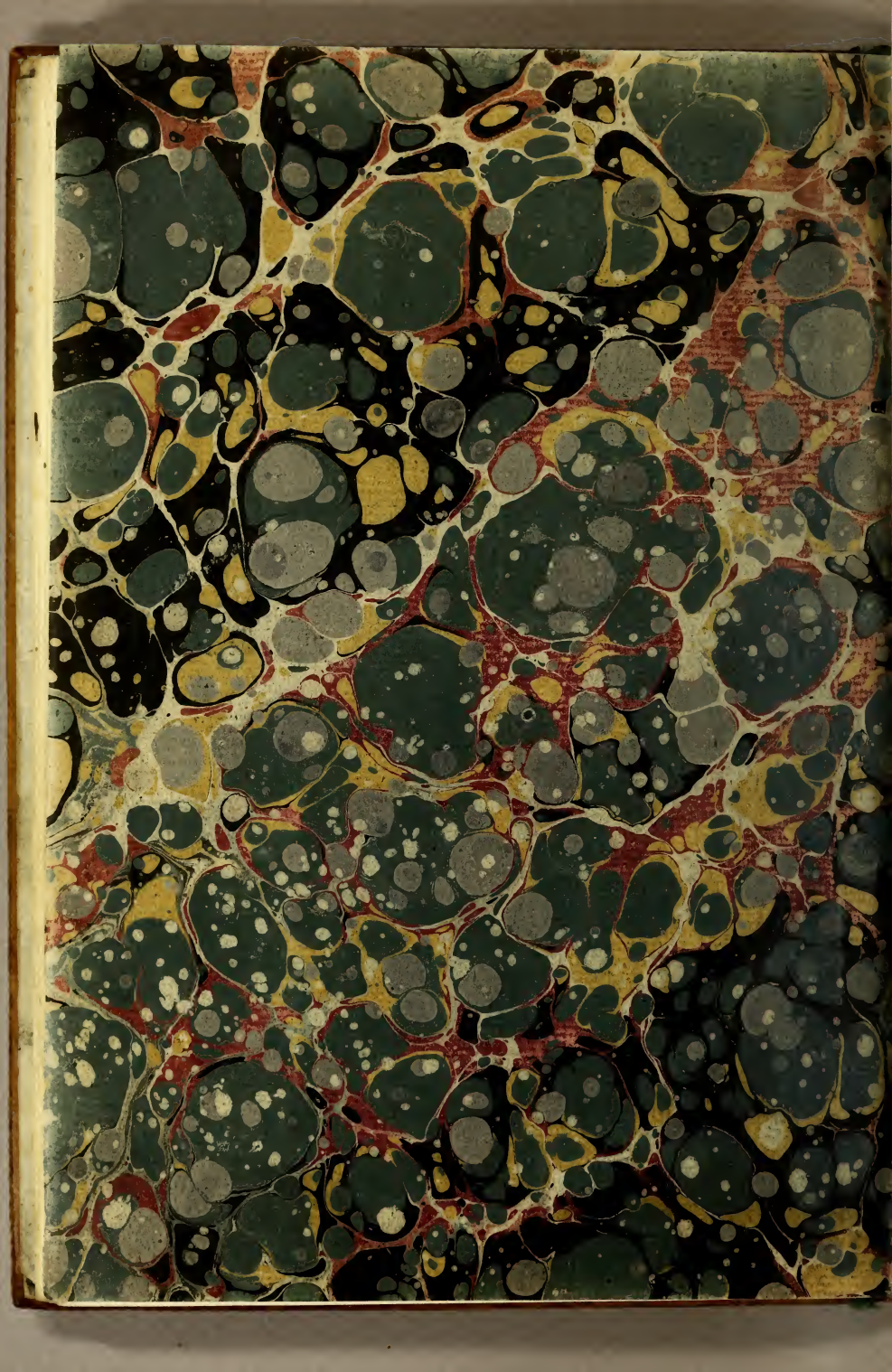
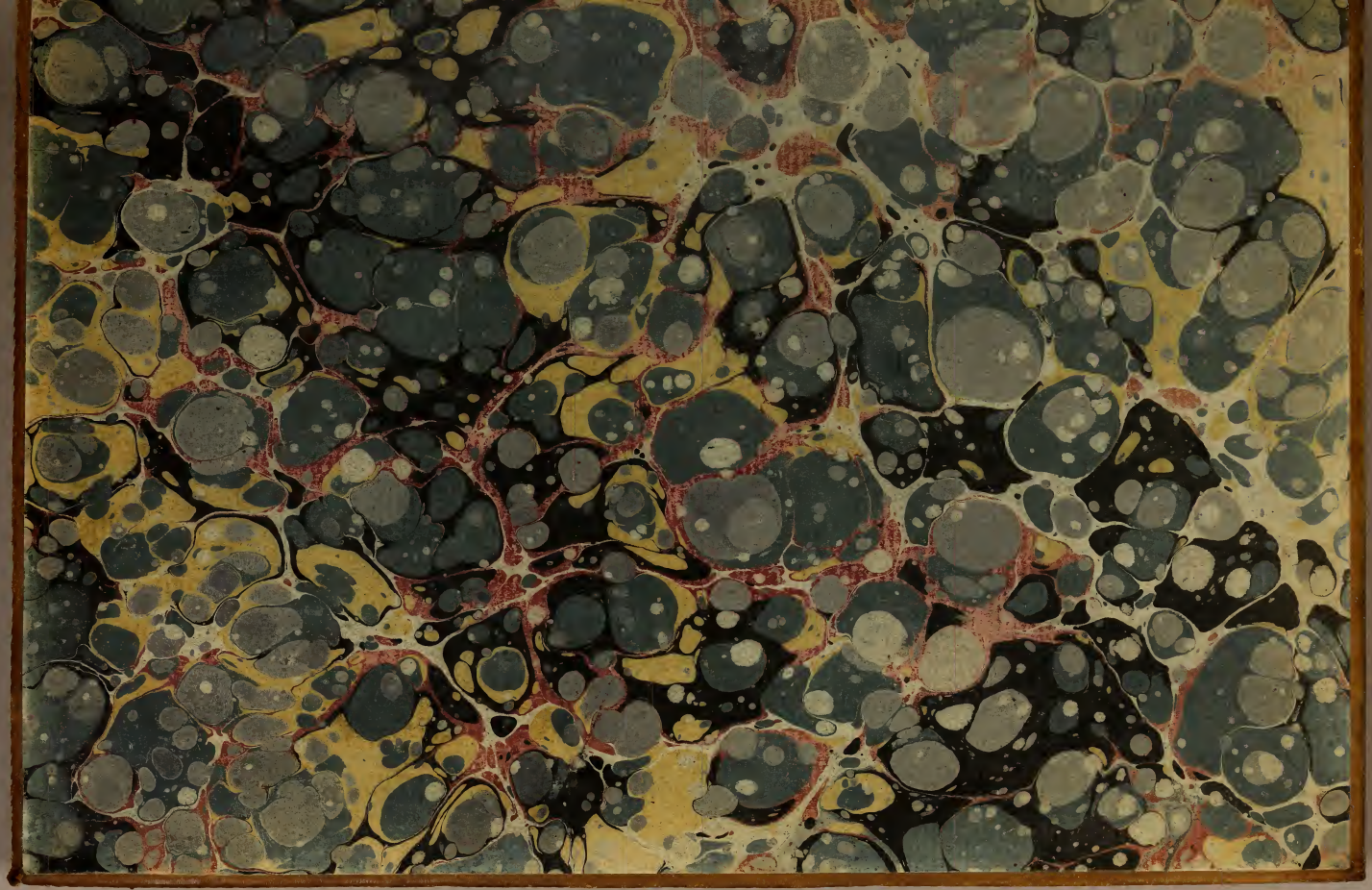


Fig. 1.
S
E
O
e
n
N
P
M
Q
C
S
T
B
R
A
Fig. 3.
M
F
F'
q
e
K
E
L
m
n
p
h
P
S
t
T
R
C
Fig. 4.
M
X
h
n
L
e
m
K
l
q
p
S
t
g
R
T
C
Fig. 2.
S
L
C'
σ'
S'
B'
ρ'
m
R
K
n
A'
O
O'
C
σ
S
B
ρ
R
A

14-258



mi/a2/70

C804
B672d

CCC OCLC 45810637
DA 5/2/12